

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VII, N. 3

Serie nona

7 Maggio 1950

Sulla distribuzione di intensità nei reticoli ultrasonori.

F. PORRECA

Istituto di Fisica dell'Università di Napoli

(ricevuto il 27 Febbraio 1950)

Riassunto. — La propagazione degli ultrasuoni in una soluzione elettrolitica, i cui ioni abbiano masse molto diverse, produce una diversa concentrazione ionica e quindi una variazione dell'indice di rifrazione, che si può valutare come ordine di grandezza. Tuttavia, misure di intensità delle righe diffratte effettuate nei reticoli ultrasonori di tali soluzioni non mettono in evidenza alcuna diversità coi risultati teorici (tenendo debito conto dell'errore delle misure).

1. — Misure d'intensità delle righe diffratte prodotte dai reticoli ultrasonori sono state fatte da diversi autori, in buon accordo con le previsioni teoriche ⁽¹⁾.

In questa nota è stato preso in esame il seguente problema: se il liquido in cui si propaga l'onda ultrasonora è una soluzione elettrolitica, i cui ioni abbiano masse molto diverse, è possibile che la diversa concentrazione ionica, che si produce per effetto dell'onda di pressione ⁽²⁾, possa produrre una tale variazione dell'indice di rifrazione, la quale generi a sua volta una diversa distribuzione d'intensità delle righe diffratte?

Com'è noto, il parametro v da cui dipende la distribuzione della intensità è dato da $v = 2\pi\mu l/\lambda$, dove l è la lunghezza dello strato percorso da ultra-

⁽¹⁾ F. H. SANDERS: *Canad. Journ. Res. (A)*, **14**, 158-171 (1936).

⁽²⁾ P. DEBYE: *Journ. Chem. Phys.*, **1**, 13 (1933).

suoni, λ la lunghezza d'onda e μ è la variazione massima dell'indice. Ora è stato calcolato ⁽³⁾ che per ottenere la presenza di frange ben nette basta che vi sia una variazione dell'indice di circa 10^{-6} . Inoltre una variazione di v di circa 10^{-1} è nettamente visibile e ciò produce una notevole variazione nella distribuzione dell'intensità, quindi è da ritenere che si possa stabilire una variazione di v di 10^{-2} il che porta ad una variazione dell'indice di circa 10^{-8} .

La teoria di DEBYE ⁽²⁾, d'altra parte, porta al calcolo della differenza di potenziale che si produce in una soluzione per effetto dell'onda ultrasonora e da detta teoria si può ricavare che la variazione di concentrazione ionica e cioè il $\Delta n/n$ è minore di 10^{-6} e tanto più grande quanto maggiore è la diversità di masse dei due ioni. Ora una variazione di concentrazione di un ordine di grandezza un po' minore di 10^{-6} può portare a variazioni di indice proprio di circa 10^{-8} , e quindi si può pensare di tentare una esperienza al riguardo.

TABELLA I.

Ordine righe diffratte	Intensità in scala arbitraria	Intensità % rispetto all'ordine 0
LASTRA A		
2	25,8 \pm 1	44,5 \pm 3,5
1	51 \pm 2	88 \pm 6,5
0	58 \pm 2	100
1	50 \pm 2	86,5 \pm 6
2	26 \pm 1	44,8 \pm 3,5
LASTRA B		
2	16,5 \pm 0,5	45,8 \pm 3
1	34 \pm 1	94,5 \pm 5,5
0	36 \pm 1,5	100
1	32,5 \pm 1	90,3 \pm 5,5
2	17,5 \pm 0,5	48,7 \pm 3

TABELLA II.

Ordine righe diffratte	Intensità in scala arbitraria	Intensità % rispetto all'ordine 0
LASTRA A		
2	23 \pm 0,8	47,5 \pm 3,5
1	43,7 \pm 1,5	90,2 \pm 6
0	48,5 \pm 1,5	100
1	43 \pm 1,5	88,7 \pm 6
2	23,7 \pm 0,8	48,8 \pm 3,5
LASTRA B		
2	18 \pm 0,5	50 \pm 3
1	33 \pm 1	91,7 \pm 5,5
0	36 \pm 1	100
1	32,2 \pm 1	89,5 \pm 5,5
2	18 \pm 0,5	50 \pm 3

2. - Si è proceduto ad una misura di intensità con il seguente dispositivo sperimentale: un circuito oscillante di tipo Armstrong eccitava il quarzo piezoelettrico sulla frequenza di 1,8 MHz (terza armonica). Il liquido in esame era contenuto in una vaschetta di dimensioni 4×5 cm² di sezione. Sono state usate onde stazionarie assicurandoci della loro esistenza ponendo una lamina metal-

⁽³⁾ R. LUCAS e P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, 7, 472 (1932).

lica parallela alla faccia emittente del quarzo e spostando tale lamina fino a realizzare le condizioni di massimo di nettezza delle frange. Dopo la vaschetta era posta la macchina fotografica di uno spettroscopio Hilgher, nel cui piano focale venivano fotografate le frange di diffrazione.

La soluzione usata è stata $\text{Pb}(\text{NO}_3)_2$ satura in acqua, che dà 1,5 mole per litro ed un rapporto fra le masse ioniche di $207/62 = 3,35$.

Si usava l'avvertenza di ottenere sulla stessa lastra le marche d'intensità che permettevano di passare dagli annerimenti alle intensità. Le lastre venivano poi analizzate con un microfotometro di MOLL secondo il metodo ben noto. Sono state fatte misure con la soluzione suddetta e con acqua su due lastre per le quali è stata fatta variare la posa.

I risultati sperimentali ottenuti sono riportati nella tabella I e II relative, rispettivamente, all'acqua ed alla soluzione.

TABELLA III.

Ordine righe diffratte	Intensità in scala arbitraria	Intensità % rispetto all'ordine 0
0	26	100
1	23	88,5
2	12	46

Nella tabella III sono riportati i valori delle intensità dedotti dalla sua distribuzione teorica ⁽⁴⁾ e dal confronto dei dati sperimentali con quelli teorici, nei limiti dell'errore sperimentale commesso nelle varie misure risulta che nelle condizioni su esposte l'effetto considerato non si riesce a mettere in evidenza.

Si ringrazia vivamente il prof. ANTONIO CARRELLI per il suo valido aiuto ed i chiari consigli.

(⁴) E. HIEDEMANN: *Ultraschallforschung*, 98 (1939).

SUMMARY

The propagation of ultrasounds in an electrolytic solution, whose ions have very different masses, produces a different ionic concentration and then a difference of refraction index, which can be valued in order of measure. However, measures of intensity of the diffracted lines made by the ultrasound grates of such solutions do not show any difference with the theoretical results (taking measuring errors into account).

Sulla teoria dell'accensione della scarica elettrica in campo magnetico trasversale.

G. VALLE

Istituto di Fisica della Università di Bologna

(ricevuto il 27 febbraio 1950)

Riassunto. — Si espone una teoria sufficientemente completa del potenziale di scarica in campo magnetico trasversale dalla quale risultano chiaramente precisate le variazioni che subisce il diagramma rappresentativo della legge di PASCHEN al crescere dell'intensità del campo magnetico da zero fino a valori comunque elevati e vengono stabiliti i limiti entro i quali la scarica può soltanto adescarsi per la presenza del campo magnetico (accensione magnetica). Anche riguardo alla dipendenza del potenziale di scarica dal campo magnetico per uno spazio di scarica prefissato risultano pienamente determinati i limiti entro cui si presentano, a seconda della distanza elettroica e della pressione, i tre casi diversi già noti singolarmente dalle ricerche sperimentali di vari autori. L'intervallo di transizione, che costituisce uno di questi casi, in cui il potenziale di scarica dapprima precipita col crescere del campo magnetico fino a un minimo, dopo il quale esso comincia appena la sua più o meno lenta ascesa, è stato oggetto anche di varie osservazioni sperimentali; esse sono qui citate particolarmente perchè vi si è fatto uso, a differenza di altri autori, di una tecnica di carattere dinamico (con corrente alternata, diodo e oscillografo catodico) che consente una grande rapidità di esecuzione e libera dall'effetto dei ritardi di scarica.

1. — Vi sono due teorie dell'accensione della scarica elettrica in campo magnetico trasversale: l'una, di M. WEHRLI ⁽¹⁾, che si basa sulla condizione di TOWNSEND (per un campo elettrico uniforme di intensità E fra elettrodi

⁽¹⁾ M. WEHRLI: *Ann. d. Phys.*, 4, 69 e 285 (1922).

piani e paralleli posti alla distanza R):

$$(1) \quad (\alpha - \beta) \cdot R = \lg \frac{\alpha}{\beta},$$

ove α e β sono i coefficienti di ionizzazione rispettivamente degli elettroni e degli ioni positivi; l'altra, di F. M. PENNING ⁽²⁾, che è in complesso quella stessa del magnetron di HULL e può applicarsi perciò soltanto al caso dell'« accensione magnetica » a pressione estremamente bassa. La migliore conoscenza che si ha oggi della funzione d'urto degli elettroni lenti

$$(2) \quad \frac{\alpha}{p} = A \cdot \exp \left[-\frac{B}{E/p} \right],$$

ove A e B sono due costanti empiriche caratteristiche del gas, e la sostituzione della condizione (1) con quella di TOWNSEND-ROGOWSKI (sempre per un campo elettrico uniforme):

$$(3) \quad \alpha \cdot R = \lg \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right),$$

ove γ è la probabilità di estrazione di elettroni dal catodo per opera degli ioni positivi, consentono di dare alla teoria, pur mantenendo per semplicità i fondamenti delle precedenti schematizzazioni, uno sviluppo assai più completo e generale, che espongo qui brevemente ritenendo che i risultati possano tornare utili nelle applicazioni.

In realtà la deduzione, in base a comuni considerazioni probabilistiche, della (2) non è priva di gravi mende ⁽³⁾; fra l'altro vi si ammette, contrariamente al vero, che gli elettroni perdano in ogni urto ionizzante tutta la loro energia cinetica ossia che essi ricomincino, dopo ogni urto di tale genere, il loro libero cammino nel gas partendo dalla quiete; si ammette inoltre che ogni urto di elettroni dotati di energia superiore al lavoro di ionizzazione porti effettivamente alla ionizzazione della particella urtata, mentre ciò avviene al massimo solo per un terzo di tali urti. Probabilmente i due errori, che influiscono in senso inverso sul valore di α , si compensano almeno in parte, giacchè la (2) torna egregiamente entro ampi limiti della variabile E/p , purchè si assegnino alle costanti A e B opportuni valori empirici diversi da quelli corrispondenti al significato teorico di esse (A , sezione d'urto, $B/A = V_i$, potenziale di ionizzazione del gas).

Ciò posto, la teoria dell'accensione della scarica elettrica in campo magne-

⁽²⁾ F. M. PENNING: *Physica*, 3, 873 (1936).

⁽³⁾ A. v. ENGEL e M. STEENBECK: *Elektrische Gasentladungen* (Berlin, Springer, 1932), vol. I, p. 95 e segg.

tico, analogamente a quella dell'accensione in assenza di campo, si può fondare sulle relazioni (2) e (3) e bisogna solo tenere conto del fatto che, per effetto del campo magnetico, il libero percorso degli elettroni fra un urto e l'altro cessa di essere rettilineo. Può avvenire anzi che nell'ambito del loro libero cammino, gli elettroni riescano, dopo essere avanzati alquanto nel campo elettrico, finanche a retrocedere prima di subire un nuovo urto. Tutto ciò si traduce in un aumento del numero medio degli urti ionizzanti per ogni unità di lunghezza percorsa in direzione del campo elettrico oppure, se si vuole, in un aumento apparente della pressione del gas agli effetti del computo del coefficiente α della formula (2). Occorre però fare ancora l'ipotesi, del resto pienamente giustificata, che il libero cammino medio rettificato $\lambda = \lambda_1/p$ (λ_1 , libero cammino medio degli elettroni a $p = 1$ torr) non muti in seguito all'incurvamento delle loro traiettorie.

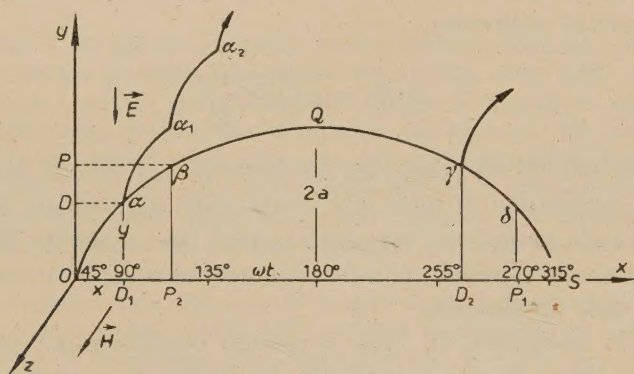


Fig. 1.

2. - Con riferimento alla fig. 1 (dove E è il campo elettrico uniforme misurato in V/cm ed H il campo magnetico, pure uniforme e perpendicolare ad E , misurato in A/cm) si ha allora che un elettrone, inizialmente fermo in O , percorre nel tempo t fra due urti consecutivi l'arco

$$(4) \quad \widehat{O\alpha} = 4a \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right) = \lambda = \lambda_1 p$$

della cicloide OQS di equazione

$$(5) \quad x = a(\omega t - \sin \omega t); \quad y = a(1 - \cos \omega t) = 2a \sin^2 \frac{\omega t}{2},$$

essendo y il libero cammino medio in direzione di E . Detta quindi p_H la pressione apparente da porsi in (2) al posto della pressione vera p , si ha, poichè

i liberi cammini medi sono inversamente proporzionali alle pressioni ($p_H : p = \lambda : y = \widehat{O\alpha} : y$):

$$p_H = \frac{2p}{1 + \cos \frac{\omega t}{2}},$$

o, moltiplicando ancora entrambi i membri per la distanza elettrodica R (cm), allo scopo di introdurre il prodotto pR (torr cm), che caratterizza, in base alle leggi di similitudine, lo spazio di scarica considerato:

$$(6) \quad p_H R = \frac{2pR}{1 + \cos \frac{\omega t}{2}} = V\eta,$$

essendo η (torr cm/V) un parametro definito dalla stessa (6) e $V = ER$ la tensione applicata fra gli elettrodi piani e paralleli che limitano tale spazio. Allora la condizione (3) si scrive con l'aiuto della (2) e della (6):

$$(7) \quad V = \frac{\lg \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}{A} \cdot \frac{\exp [B\eta]}{\eta} = 2\Gamma \frac{\exp [B\eta]}{\eta} V,$$

con

$$(8) \quad pR = \frac{1}{2} \eta V \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2} \right) = \sigma \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2} \right) \text{ torr cm.}$$

D'altra parte, per la cicloide percorsa dagli elettroni, supposti inizialmente in quiete, risulta dalla teoria di J. J. THOMSON ⁽⁴⁾ sul loro moto lento sotto l'azione simultanea di un campo elettrico e di un campo magnetico ortogonale (essendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9}$ H/cm; e/m , carica specifica dell'elettrone = 1,77 C/g):

$$(9a) \quad \omega = \frac{e}{m} = \mu_0 H \cdot 10^7 = 2\pi C_0 H \mu s^{-1},$$

$$(9b) \quad a = \frac{E}{\mu_0 H \omega} = C_1 R \frac{V}{(HR)^2} \text{ cm},$$

con

$$C_0 = 2 \frac{e}{m} 10^{-8} = 3,54 \text{ cm/C}; \quad C_1 = \frac{10^9}{8\pi^2 C_0} = 3,58 \text{ A}/\Omega.$$

⁽⁴⁾ Cfr. per es. M. KNOLL, F. OLLENDORFF e R. ROMPE: *Gasentladungstabellen* Berlin, Springer, 1935), p. 7.

Il raggio a del cerchio generatore della cicloide si può ricavare anche dalla (4):

$$a = \lambda_1 p / 4 \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right).$$

Eguagliando allora le due espressioni si trova con l'aiuto della (8):

$$(10) \quad HR = \sqrt{\frac{2C_1}{\lambda_1}} \sqrt{\eta} V \sin \frac{\omega t}{2} = \rho \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Posti quindi

$$(11) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} \eta V \text{ torr cm} ; & \Lambda = \sqrt{\frac{2C_1}{\lambda_1}} (\Lambda/\Omega \text{ torr cm})^{1/2} ; \\ \rho = \Lambda \sqrt{\eta} V \text{ A} ; & \Gamma = \frac{\lg \left(1 + \frac{1}{\gamma} \right)}{2A} \text{ torr cm} , \end{cases}$$

il problema della determinazione del potenziale di scarica V in campo magnetico trasversale per ogni valore del prodotto pR ossia per qualunque spazio di scarica (fra elettrodi piani e paralleli) è virtualmente risolto dalle tre equazioni (7), (8) e (10).

3. - Per l'aria si può porre in particolare, scegliendo i valori più attendibili: $\lambda_1 = 0,026 \text{ torr cm}$, da cui $\Lambda = 16,6 (\Lambda/\Omega \text{ torr cm})^{1/2}$; $A = 14,6 (\text{torr cm})^{-1}$; $B = 365 \text{ V/torr cm}$; $\gamma = 0,035$, da cui $\Gamma = 0,1165 \text{ torr cm}$; le equazioni del problema diventano

$$\text{I.} \quad V = 0,233 \frac{\exp [365\eta]}{\eta} \text{ V}$$

$$\text{II.} \quad pR = \sigma \left(1 + \cos \frac{\omega t}{2} \right) \text{ torr cm},$$

$$\text{III.} \quad HR = \rho \sin \frac{\omega t}{2} \text{ A} ,$$

con

$$\sigma = \frac{1}{2} \eta V \text{ torr cm} ; \quad \rho = 16,6 \sqrt{\eta} V \text{ A} .$$

Fungono da parametri: la variabile η che può andare da 0 e $+\infty$ e l'angolo ωt che determina l'arco di cicloide $\widehat{O\alpha}$ liberamente percorso in media

dagli elettroni tra un urto e l'altro e che può quindi variare da 0° a 360° , nel quale ultimo caso gli elettroni ritornerebbero ogni volta alla quota di partenza, cioè non potrebbero mai procedere verso l'altro elettrodo.

Dal parametro η risultano determinati simultaneamente V , σ e ρ , indipendentemente dal campo magnetico applicato. Poichè η non interessa che per il calcolo, nella fig. 2 sono riportati V e $1/\rho$ in funzione di σ . Mentre η varia da 0 a $+\infty$, σ varia da Γ (ossia, per l'aria, da 0,1165) a $+\infty$.

Pel valore minimo di σ si ha $V = +\infty$ e $\rho = +\infty$ ossia $1/\rho = 0$. Inoltre la tensione di scarica V ha per $\eta = 1/B$ ($= 2,74 \cdot 10^{-3}$) un minimo $V_m = 2e\Gamma B$ ($= 231$ V), cui corrispondono i valori $\sigma_m = e\Gamma$ ($= 0,313$ torr cm) e $\rho_m = 2e\Lambda\Gamma\sqrt{B}$ ($= 200,4$ A). Anche ρ ha per $\eta = 1/2B$ ($= 1,37 \cdot 10^{-3}$) un

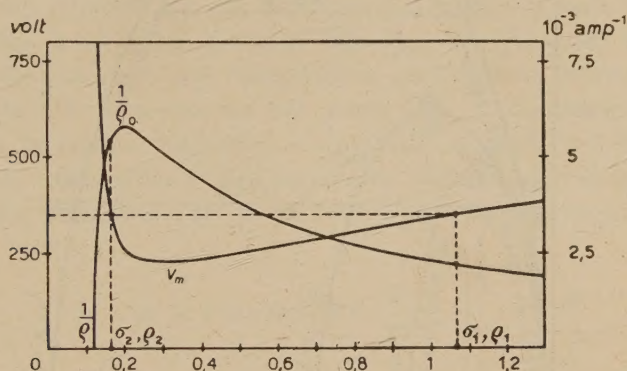


Fig. 2.

minimo $\rho_0 = 2\sqrt{2e\Lambda\Gamma\sqrt{B}}$ ($= 171,9$ A) e quindi $1/\rho$ un massimo $1/\rho_0 = 5,817 \cdot 10^{-3} \text{ A}^{-1}$, cui corrispondono i valori $V_0 = 4\sqrt{e}\Gamma B$ ($= 280,2$ V) e $\sigma_0 = \sqrt{e}\Gamma$ ($= 0,192$ torr cm). Le indicazioni numeriche si riferiscono sempre come esempio all'aria.

Fissato che si abbia un certo valore di $V > V_m$ (per cui restano determinate (fig. 2) due coppie di valori σ_1, ρ_1 e σ_2, ρ_2 , con $\sigma_2 < \sigma_1$) la relazione funzionale tra pR ed HR , per cui si ha sempre questa stessa tensione di scarica, è rappresentata in base alle equazioni II e III, per ciascuna delle due coppie di valori, da una particolare semiellisse (la parte negativa non interessa perchè basta ovviamente considerare solo i valori positivi di HR), con centro sull'asse pR alla distanza σ dall'origine e semiassi σ e ρ (fig. 3).

Solo per $V = V_m$ le due semiellissi E_1 ed E_2 coincidono (E_{12}).

Ora se, oltre al valore di $V > V_m$ si fissa anche un certo valore di HR , se $HR < \rho$ si hanno due coppie di soluzioni per il prodotto pR , corrispondenti ai punti α, β, γ e δ della fig. 3, ossia restano determinate quattro diverse condizioni particolari del tratto di scarica nelle quali (agendo il campo magnetico

liberi cammini medi dati dagli archi della cicloide $\widehat{O\alpha}$, $\widehat{O\beta}$, $\widehat{O\gamma}$, $\widehat{O\delta}$ cui corrispondono valori

$$(pR)_\alpha > (pR)_\beta > (pR)_\gamma > (pR)_\delta$$

del prodotto pR . La scarica può accendersi al potenziale V solo negli intervalli (fig. 3) tra α e β e tra γ e δ ; α corrisponde a una accensione distale (D_1), β a una prossimale (P_2), γ a una distale (D_2), δ di nuovo a una prossimale (P_1). L'ordine con cui si succedono i singoli valori di pR dimostra anche che per ogni V l'ellisse E_2 è interamente contenuta nell'ellisse E_1 . Le due accensioni γ e δ si distinguono nettamente da quelle α e β ; infatti lo stesso avanzamento di un elettrone in direzione del campo, per es. OP , è dovuto nel caso β a un libero percorso $\widehat{O\beta}$ che non supera il vertice Q della cicloide, nel caso γ per contro a un libero percorso $\widehat{OQ\gamma}$ che, oltrepassando tale vertice, riporta l'elettrone con cammino retrogrado a subire l'urto successivo ancora alla stessa quota OP . L'accensione del primo tipo vogliamo chiamarla, pur avvenendo essa in campo magnetico, «ordinaria» e quella del secondo tipo più propriamente «magnetica». Nell'accensione ordinaria (O) si ha $0^\circ \leq \omega t \leq 180^\circ$, in quella magnetica (M) si ha $180^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ$. L'angolo ωt risulta per O da

$$(12) \quad \omega t = 2 \arcsin \left(HR \cdot \frac{1}{\rho} \right),$$

per M da

$$(13) \quad \omega t = 2 \left[\pi - \arcsin \left(HR \cdot \frac{1}{\rho} \right) \right].$$

Con la nostra nomenclatura le accensioni caratterizzate dai punti α , β , γ , δ vengono ad essere, nell'ordine; rispettivamente del tipo DO , PO , DM , PM . Se $HR > \rho$, si hanno due sole soluzioni (α' , δ' , fig. 3), rispettivamente del tipo DO e PM ; esse coincidono per $V = V_m$.

4. - Le figg. 4 a , b , c , d illustrano graficamente la dipendenza della tensione di scarica V dalle condizioni del tratto di scarica (fra elettrodi piani e paralleli) caratterizzate, per la legge di similitudine, dal prodotto pR (l'ascissa è $\log 100 pR$), per vari campi magnetici trasversali, quale risulta dalla nostra teoria. In particolare la fig. 4a dà la curva $V = f(pR)$ in assenza di campo magnetico, ossia l'ordinaria curva delle tensioni di scarica (legge di PASCHEN). Il campo tratteggiato è quello in cui la scarica si adessa e si sviluppa. Una scarica in assenza di campo magnetico non si adessa affatto se $pR < 2\Gamma$, ossia nell'aria se $pR < 0,233$ torr cm ($\log 100 pR = 1,367$); ed è qui importante di mettere in rilievo che l'azione del campo magnetico si estrinseca proprio parti-

colarmente nel rendere possibile l'accensione della scarica sotto questo limite, come risulta dalle figg. 4b, 4c e 4d. Anzi finchè il campo magnetico rimane inferiore al limite $HR = \rho_0 = 172 \text{ A}$, il campo dell'accensione magnetica rimane del tutto distinto da quello dell'accensione ordinaria, ciò che giustifica le denominazioni date ai due tipi di accensione. Per valori di HR più elevati i due campi si fondono in uno solo e a distinguere l'accensione magnetica da quella ordinaria rimane soltanto il valore di ωt che è esplicitamente indicato in vari punti lungo le curve limiti.

Accanto al prodotto pR che caratterizza lo spazio di scarica entra, come si è visto, quale fattore determinativo, nella teoria, il prodotto HR . In presenza di un campo magnetico, se si fa « a » volte maggiore la distanza elettrodica, si ha lo stesso potenziale di accensione riducendo la pressione alla « a »-esima parte e l'intensità del campo magnetico pure alla « a »-esima parte (*legge di similitudine magnetica*). In altri termini, è normativo per i fenomeni di scarica in campo magnetico il quoziente H/p (così come lo è il quoziente E/p riguardo agli effetti del campo elettrico). In questa ultima forma, anzi, si trova espressa generalmente nella letteratura la legge di similitudine magnetica.

Ora importa anche l'andamento che presenta il potenziale di scarica in condizioni costanti caratterizzate dal prodotto pR , al variare del campo magnetico, o meglio, per ciò che si è detto, di HR . L'andamento risulta sostanzialmente diverso a seconda del valore del prodotto pR e precisamente: 1) se esso è minore del valore limite per campo nullo 2Γ (fig. 4c); 2) se è intermedio fra questo valore e quello $2e\Gamma$ per cui si ha, con campo nullo, il minimo di tensione di scarica (fig. 4f) o 3) se è superiore a questo valore (fig. 4g). Nel primo caso l'accensione è possibile soltanto in campo magnetico; la funzione $V(HR)$ è a due valori ed esiste per ogni pR un campo HR tale per cui si ha la minima tensione di scarica V_m , però con angoli ωt diversi e crescenti col diminuire di pR , come è indicato nella fig. 4e. Per i valori più piccoli di pR (alto vuoto, se si escludano distanze elettrodiche estremamente piccole), la variazione di ωt lungo le curve limiti diventa assai lenta. Poichè si ha dalle equazioni II e III, con facile calcolo:

$$(14) \quad \frac{(HR)^2}{V} = 551 pR \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2} \right),$$

per pR costante molto piccolo e $\omega t = 360^\circ$ (o comunque costante) risulta

$$(15) \quad \frac{(HR)^2}{V} = \frac{1}{K} = \text{costante}.$$

Ciò significa che le curve limiti, quanto più pR è piccolo, tanto meno debbono scostarsi dalle parabole definite dalla (15). Nella fig. 4e, a scopo di confronto,

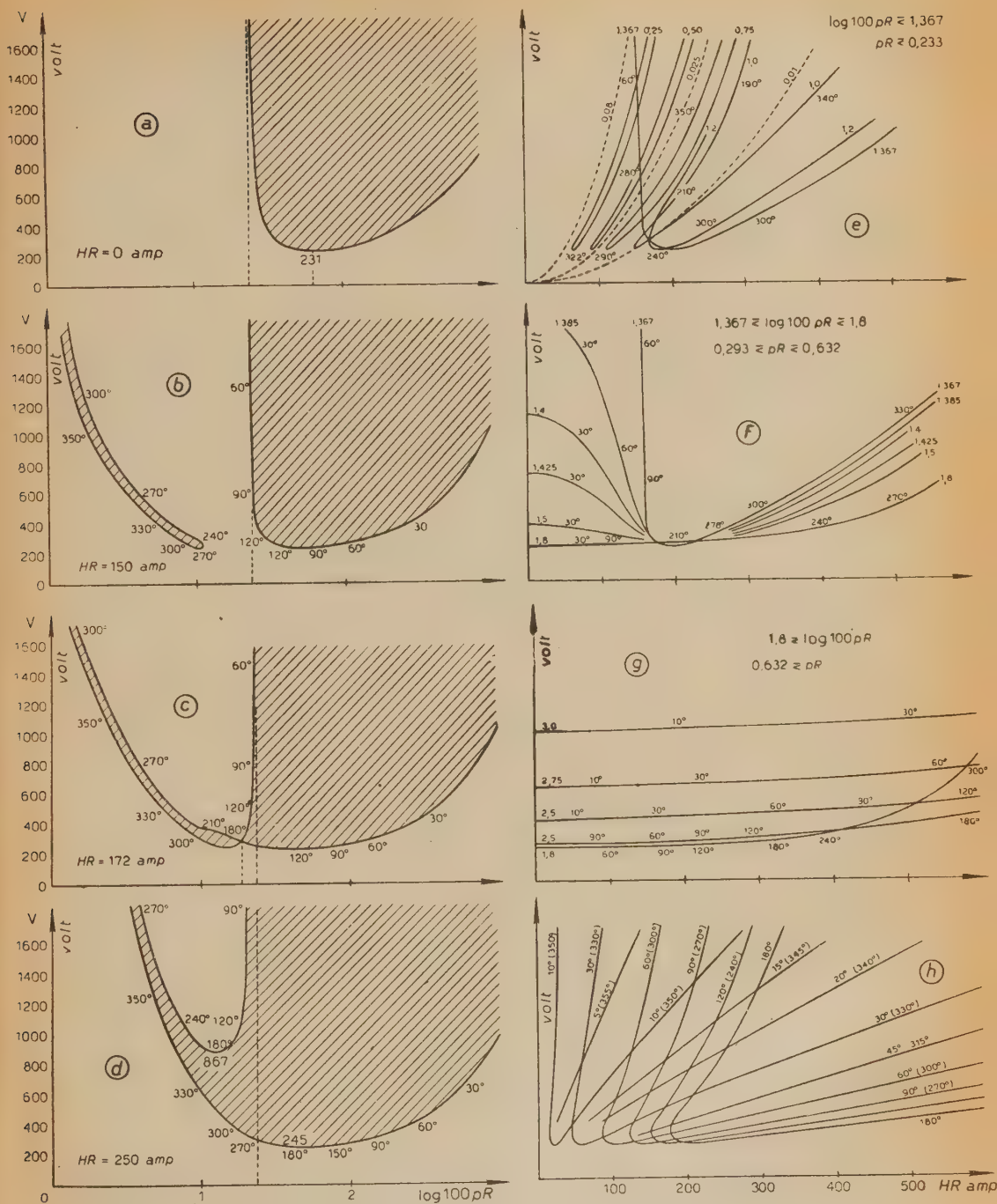


Fig. 4.

sono riportate punteggiate alcune di queste parabole (per $K = 0,08, 0,025, 0,01$). Questa approssimativa coincidenza delle curve della tensione di scarica con le parabole $V/(HR)^2 = K$ è confermata anche dalle determinazioni sperimentali di PENNING in Argon a bassissima pressione che riguardano tutto l'intervallo di pR qui considerato.

Le parabole (15) rappresentano in base alla (9b) anche le condizioni nelle quali l'altezza $2a$ della cicloide descritta liberamente da un elettrone partente dalla quiete risulta eguale a una certa frazione fissa della distanza elettrodica R :

$$\frac{2a}{R} = 2C_1k$$

(nelle curve riportate in fig. 4a, per esempio, rispettivamente $2a/R = 0,57, 0,18, 0,07$). Così si rileva che per $pR = 0,018$ torr cm ($\log 100 pR = 0,25$) il massimo avanzamento $2a$ degli elettroni all'atto dell'accensione è circa il 50 % della distanza elettrodica R , sicchè raggiungono l'anodo senza aver potuto ionizzare tutti gli elettroni prodotti al di là della mezza distanza elettrodica dal catodo. Per $pR = 0,1$ torr cm ($\log 100 pR = 1,0$) il massimo avanzamento degli elettroni è invece solo circa il 6 % di R ; gran parte degli elettroni formati nell'interno dello spazio di scarica possono quindi generare a lor volta dei secondari.

La fig. 4f si riferisce a valori di pR compresi nell'intervallo fra il limite per l'accensione senza campo magnetico (2Γ) e il valore $2e\Gamma$ di pR , per cui senza campo si ha il minimo di tensione di scarica. È questo un intervallo di transizione in cui, crescendo il campo magnetico, si passa dall'accensione ordinaria (ad alta tensione di scarica), attraverso un brusco abbassamento di tale tensione, all'accensione magnetica. Poi, crescendo ancora il campo, si ha un più o meno lento regolare aumento della tensione di scarica col campo magnetico. Alcune delle curve determinate sperimentalmente da WEHRLI corrispondono all'intervallo qui considerato.

Altre curve di WEHRLI rientrano invece nel terzo intervallo (fig. 4g) per $pR > 2e\Gamma$. L'andamento è qui sempre crescente, tanto più lentamente quanto più elevato è il valore di pR ⁽⁵⁾.

5. - Complessivamente si può dire che la nostra teoria comprende e coordina almeno qualitativamente tutti i risultati di ricerche sperimentali fatte in argomento. Una stretta coincidenza anche dal lato quantitativo non è certo

(5) La fig. 4h dà, con riferimento alle stesse coordinate HR e V dei diagrammi sovrastanti, le linee di eguale ωt . Nei rami più inclinati il primo angolo si riferisce all'accensione PO , quello fra parentesi alla DM , nei rami meno inclinati il primo angolo all'accensione DO , quello fra parentesi alla PM .

da attendersi, troppi essendo i dati empirici, molto spesso incerti, ai quali si deve ricorrere. Nella seguente tabella diamo, per puro orientamento, alcuni valori relativi all'aria, all'idrogeno e all'elio.

	λ_1	A	B	γ	2Γ	$2e\Gamma$	V_m	ρ_m	V_0	ρ_0
Aria	0,026	14,6	365	0,035	0,233	0,632	231	200	280	172
H ₂	0,0484	5,0	130	0,095	0,488	1,328	172	184	210	158
He	0,0775	2,8	34	0,021	1,386	3,774	128	212	156	183

La teoria svolta vale naturalmente in modo più rigoroso soltanto per il caso di elettrodi piani e paralleli; nella parte essenziale qualitativa è logico

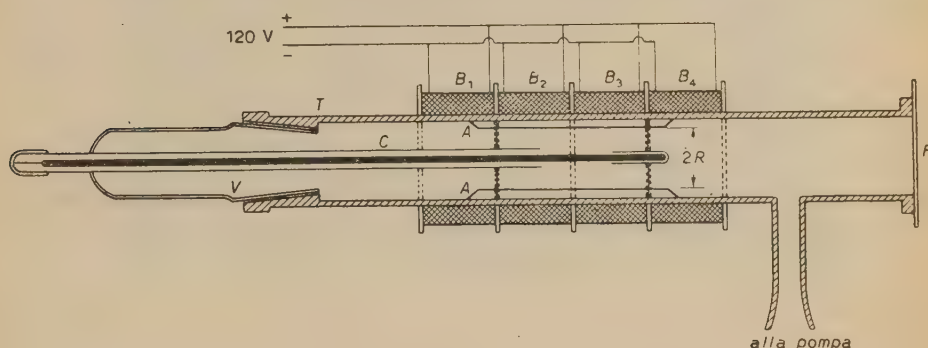


Fig. 5.

però che essa possa applicarsi anche ad altri casi. Di fatto tanto le esperienze di WEHRLI, quanto quelle di PENNING, per non citare tanti altri sperimentatori che hanno lavorato precedentemente sullo stesso argomento, hanno usato elettrodi cilindrici coassiali o, quale elettrodo interno, addirittura un filo; tale dispositivo si presta ovviamente molto bene per studiare l'azione di un campo magnetico trasversale: in una serie di esperimenti fatti sotto la mia guida dalle sig.ne D. DEL NINNO e L. PICCIONE (Parma) sono stati adoperati dei pari elettrodi cilindrici. La fig. 5 mostra il tubo da scarica usato, munito della finestra di vetro piana F per l'osservazione e la fotografia del fenomeno luminoso. Il tubo era alimentato (fig. 6) dal secondario di un trasformatore attraverso un diodo, in modo da utilizzare in un solo senso la tensione alternata disponibile. A differenza di ciò che era stato fatto dagli altri autori, si determinava quindi all'oscillografo la tensione dinamica di accensione, nel ripetersi periodico di tale fenomeno con la frequenza della corrente alternata (42 Hz) inviata nel primario del trasformatore. Questo metodo dinamico libera dagli effetti

del ritardo di scarica e consente di realizzare delle tecniche a svolgimento molto rapido per lo studio dei fenomeni di scarica.

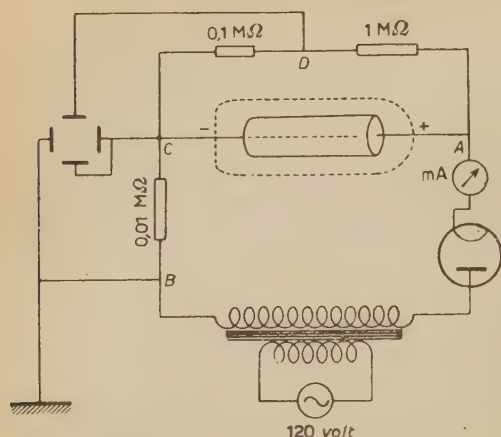


Fig. 6.

Particolare attenzione è stata rivolta in queste esperienze all'intervallo di transizione, al quale si riferisce la fig. 4f. La fig. 7 mostra alcuni dei risultati ottenuti a varie pressioni per due diversi raggi del cilindro anodico: a) $R = 2$ cm, b) $R = 4$ cm (R si può confondere con la distanza elettroica, data la sottigliezza del filo catodico, raggio 0,1 cm). Come si vede, qualitativamente il risultato della teoria rimane confermato. La legge di similitudine magnetica si traduce invece sol-

tanto nella diminuzione, col crescere di R , del valore di H , per cui si ha il brusco abbassamento della tensione di scarica; ma ciò è naturale, perchè il campo elettrico non è uniforme e la gran parte della caduta di tensione è, già prima dell'accensione, concentrata intorno al filo catodico.

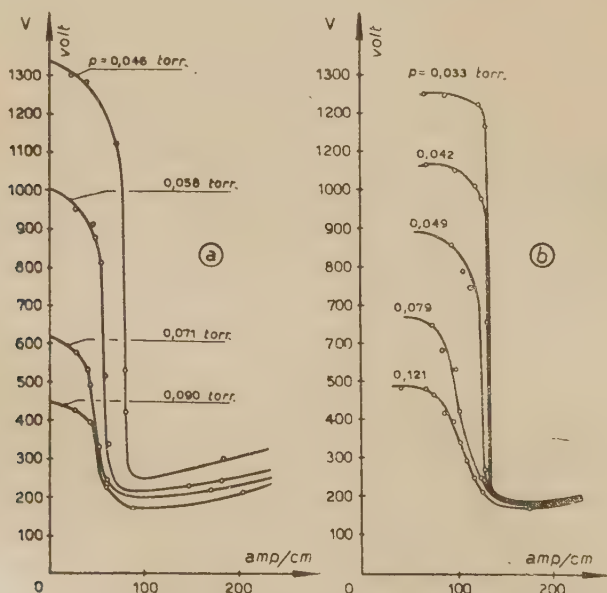


Fig. 7.

L'intervallo di transizione di cui trattiamo è compreso nel tratto della curva di accensione senza campo (fig. 4a) posto fra l'asintoto e il minimo di tensione di scarica, cioè $2\Gamma \leq pR \leq 2e\Gamma$.

La scarica che si adescia in tali condizioni senza campo magnetico è una scarica cosiddetta «impedita» in cui cioè la regione catodica e in particolare il bagliore non può svilupparsi completamente per la troppa vicinanza dell'anodo. Quando si fa agire il campo magnetico con intensità tale da produrre il forte abbassamento della tensione di scarica, tutto il bagliore si concentra invece intorno al filo catodico con densità di corrente notevolmente aumen-

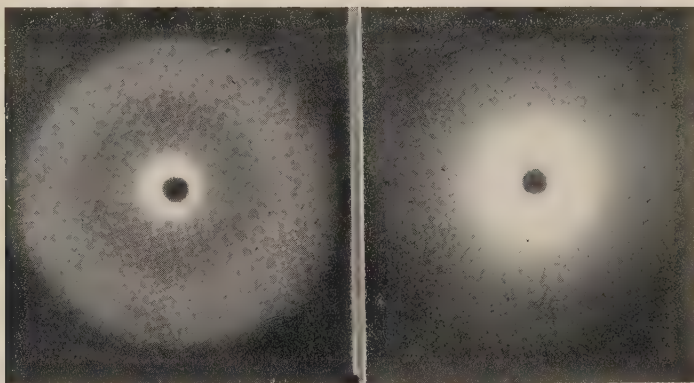


Fig. 8.

tata; la scarica non è più impedita. Ciò è noto già dalle esperienze più remote; in particolare ne tratta il KOSSEL⁽⁶⁾ in una memoria del 1921. Credo però conveniente di riprodurre in fig. 8 le fotografie dei due aspetti diversi della scarica assunte durante le mie esperienze, perchè di analoghe non se ne trovano, per quanto io sappia, nella letteratura.

Il KOSSEL ha anche determinato per punti le caratteristiche della scarica a bagliore con campi magnetici trasversali di varia intensità. Col mio metodo dinamico l'assunzione di tali caratteristiche è comoda e rapidissima e dà risultati perfettamente riproducibili. In realtà si tratta nel mio caso, di caratteristiche *quasi statiche*, perchè percorse in un tempo dell'ordine di $5 \cdot 10^{-3}$ s (1/4 di periodo). La fig. 9 riproduce per es. una serie di tali caratteristiche prese all'oscillografo per il tubo con $R = 4$ cm alla pressione $p = 0,034$ torr con campi magnetici di intensità crescente dalle curve più alte a quelle più basse $H = 0, 164, 197, 246, 301, 383, 547$ A/cm (1 divisione delle ascisse

(6) W. KOSSEL: *Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik*, **18**, 326 (1921).

1 mA, delle ordinate 100 V). Nella interpretazione dell'oscillogramma bisogna apportare al valore dell'intensità i in corrispondenza di un generico valore V della tensione, la correzione $-V/R$ essendo R la resistenza ($1,1 \cdot 10^6 \Omega$) derivata sul tubo di scarica. Tale correzione è rappresentata dalla retta lievemente inclinata rispetto all'asse delle ordinate, assunta, nello stesso modo delle altre caratteristiche, a tubo spento. La fig. 9 mostra che al quasi brusco abbassamento della tensione di scarica che si ha nell'intervallo considerato

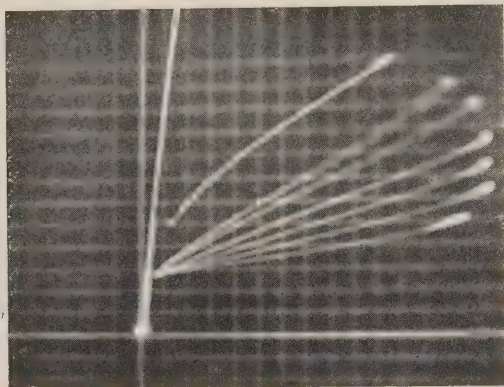


Fig. 9.

quando il campo magnetico raggiunge un certo ordine di grandezza corrisponde poi, dopo l'accensione, anche un analogo abbassamento di tutta la caratteristica. Crescendo ulteriormente il campo magnetico, quando la tensione di scarica diventa quasi indipendente da esso, le caratteristiche si abbassano ancora, mentre la variazione con H si fa man mano sempre meno sensibile, ciò che indica l'esistenza di una caratteristica limite per elevate intensità del campo magnetico applicato.

SUMMARY

The A. gives a fairly developed theory of the discharge potential in a transversal magnetic field, based on the apparent rising of the gas pressure caused by this latter in the direction of the electric field in which the electronic showers rise and on the stationarity condition of TOWNSEND-ROGOWSKI. In this theory the variations of the diagram representing the law of PASCHEN with the rising of the magnetic field from zero to arbitrary high values are clearly determined and the limits are fixed between which in each single case one has the magnetic ignition, that is the discharge

can be primed only by the presence of the magnetic field. With reference to the dependence of the discharge potential from the intensity of the magnetic field for a determined discharge space (between plane and parallel electrodes) the exposed theory fully determines the limits between which, depending from the distance between the electrodes and from the pressure, the three different cases (already singularly known from the experimental researches of several Authors) present themselves. In the first case the discharge potential rises steeply with a nearly parabolic law with the rising of the magnetic field (high vacuum, case considered by PENNING) or rises instead much slower (higher pressure or wider electrodic distances) (second case): the third case refers to a transition interval in which the discharge potential with the rising of the magnetic field first falls to a minimum after which he begins his more or less slow rise. This transition interval has been also the object of different experiments (between cylindrical coaxial electrodes however) which are here expressly mentioned because they were performed, differently from other Authors, with a dynamical technique (with alternated current, diode and cathode ray oscillograph) which allows great speedy execution and avoids the effects of bilated discharges.

Sulla compressibilità delle soluzioni elettrolitiche.

G. BRANCA e A. CARRELLI

Istituto di Fisica dell'Università di Napoli

(ricevuto il 7 marzo 1950)

Riassunto. - Vengono misurate le compressibilità di alcune soluzioni elettrolitiche, con ioni di varia valenza, in funzione della concentrazione, mediante la determinazione della velocità degli ultrasuoni. Si riscontra in primo luogo che sali anomali nel campo della conducibilità elettrolitica lo sono egualmente per la compressibilità, e che inoltre bisogna ancora considerare una specifica azione ionica, non presa in esame nella teoria di DEBYE e che fa sentire la sua influenza nell'andamento della compressibilità.

Nella teoria di DEBYE ed HÜCKEL sulle soluzioni elettrolitiche, per interpretare le anomalie riscontrate sperimentalmente, si tiene conto delle forze attrattive fra i vari ioni. Ora la presenza di azioni interioniche porta, quale conseguenza, un termine aggiuntivo all'espressione della energia libera F e questo termine aggiuntivo fa sentire la sua presenza nell'espressione del coefficiente di compressibilità β . Il BACHEM⁽¹⁾, che si è occupato della questione, ha dimostrato che, indicando con β_1 il coefficiente di compressione (e cioè $\beta_1 = -\Delta V/\Delta PV_1$) del solvente puro, con β il coefficiente di compressione della soluzione, con V_1 il volume del solvente, con V il volume della soluzione, e con n il numero di mole di sostanza disciolta, la quantità:

$$(1) \quad \frac{\beta_1 V_1 - \beta V}{n} = \Phi(k_2),$$

oltre un termine costante, che non dipende dall'azione elettrostatica degli ioni, ha un termine dipendente da questa azione e proporzionale a \sqrt{c} e cioè

(¹) C. BACHEM: *Zeits. f. Phys.*, **101**, 541 (1936).

$\Phi(k_1) = A + B\sqrt{c}$; il punto importante di queste considerazioni consiste nel fatto che il coefficiente B di questo termine è nettamente deducibile dalla teoria di DEBYE, ed in particolare risulta dipendente dalle cariche dei due ioni, in modo che assume valori caratteristici per le varie soluzioni di tipo 1-1 o 1-2 o 2-2, ecc. I punti fondamentali di queste deduzioni, particolarmente la variabilità della (1) in funzione di \sqrt{c} , come anche, all'incirca, i valori dei coefficienti angolari sono in buon accordo con quelli previsti (¹).

Tutto ciò è valido però in una teoria di prima approssimazione, cioè in una teoria in cui gli ioni si considerano puntiformi. Ora la presenza di dimensioni finite degli ioni già nella conducibilità modifica notevolmente i risultati.

Dato il diretto collegamento di queste manifestazioni, si è creduto interessante ricercare se gli ioni anomali nel campo della conducibilità elettrolitica, per il fatto che dai dati ricavati dalla conducibilità si ottengono dimensioni ioniche non corrispondenti a quelle ricavate per altra via, fossero anomali anche in questo campo: precisamente sono stati presi in esame due sali, che in conducibilità presentano forti anomalie, cioè l'iodato di Na e quello di K.

I diametri ionici di questi sali, calcolati dalle misure di attività secondo la prima teoria, risultano infatti anomali; mentre calcolati con la teoria molto più approssimata di GRONWALL-LA MER-SANDVED forniscono valori abbastanza soddisfacenti, come si può vedere dalla tabellina seguente:

	KIO ₃ —NaIO ₃	KCl
DEBYE-HÜCKEL	0,03	3,40
BJERRUM	1,33	3,40
GRONWALL-LA MER-SANDVED	1,25	3,40 (in Å)

Noi abbiamo proceduto alla misura di compressibilità adiabatica β mediante il metodo degli ultrasuoni. Purtroppo questi sali sono pochissimo solubili e quindi non si è potuto ottenere una notevole variazione delle velocità ultrasuonore. Il dispositivo sperimentale è il seguente:

Abbiamo usato un quarzo a sezione rettangolare con il lato più lungo tagliato parallelamente all'asse ottico ed il più corto parallelamente ad un asse elettrico. Esso è montato con tenute di gomma sul fondo di una vaschetta. La faccia superiore è con questa in contatto elettrico. La faccia inferiore è invece isolata e fuori del contatto col liquido. Le superfici del quarzo sono rese conduttrici mediante sottilissimi fogli di stagnola incollati con colofonia e cera vergine. La vaschetta porta, su due facce opposte, due finestre con vetri a facce piane e parallele per il passaggio dei raggi luminosi. La luce, proveniente da una lampada a vapori di mercurio, posta dinnanzi alla fenditura di un collimatore, dopo avere attraversato la vaschetta, è raccolta da una macchina fotografica. Nella vaschetta è contenuto il liquido su cui si sperimenta e che viene attraversato dalle onde ultrasuonore. Il circuito oscillatore è del tipo HARTLEY a reazione. Si sono ottenuti valori diversi delle frequenze ultra-

sonore, servendosi del medesimo quarzo, eccitato sulle armoniche dispari successive e precisamente sulla 5^a, 7^a e 9^a di frequenze 2925; 4095; 5265 kHz che sono state misurate con un ondometro.

Dinnanzi alla fenditura del collimatore si è poi posto un filtro di WOOD, in modo da utilizzare solo la riga $\lambda = 3966 \text{ \AA}$. Si è fatto uso di lastre ortocromatiche Cappelli.

Sulle lastre ottenute si osservano con molta nettezza gli spettri di 2° ordine in onde stazionarie: le misure sono state condotte su tali spettri mediante un comparatore Abbe-Zeiss; la precisione delle misure è dell'ordine di 10^{-3} cm .

Le esperienze sono state condotte alla temperatura di 15° circa; non è stato fatto uso di un termostato, ma si è sempre misurata la temperatura e ci si è assicurati che le oscillazioni termiche erano molto piccole.

Poichè la legge di variazione dell'espressione $\Phi(k_2)$ in funzione di \sqrt{c} è già stata assicurata quale lineare da BACHEM, ci siamo limitati a determinare $\Phi(k_2)$ per due concentrazioni, per individuare la retta che dà $\Phi(k_2)$ in funzione di \sqrt{c} . Gli errori relativi che affettano i dati ottenuti sono segnati nella tabella ed in figura.

Dai dati ottenuti risulta, in accordo con quanto poteva prevedersi, che il valore del coefficiente angolare dei due sali considerati (KIO_3 e NaIO_3) è molto piccolo e, più particolarmente, di certo inferiore a quello che la teoria prevede per sali 1-1. Per maggiore sicurezza, abbiamo ritenuto opportuno, oltre che utilizzare per confronto risultati di BACHEM relativi al NaCl , di fare le misure relativamente al KCl , ottenendo un valore in buon accordo con quello relativo al NaCl . I risultati sono riportati in figura.

Bisogna però osservare che ritenere l'energia libera F influenzata, nel caso delle soluzioni elettrolitiche, solo dalle azioni elettrostatiche fra i vari ioni è un'ipotesi troppo semplicistica. Bisogna tener conto, tra l'altro, anche del fatto che ogni ione produce nel suo intorno un campo elettrico, il quale causa una orientazione dei dipoli del solvente, e cioè, nel caso specifico, dell'acqua. Conseguentemente bisogna aggiungere alla energia libera F ancora un termine dovuto a questa azione attrattiva; il calcolo di questo termine può farsi nel modo seguente: la probabilità perchè il dipolo del solvente di momento μ , e che si trova nel campo di intensità E prodotto da un ione, formi con E l'angolo θ , e si trovi nell'angolo solido $d\Omega$ è data da

$$A \exp [\mu E \cos \theta / kT] d\Omega ,$$

e quindi l'energia media del dipolo, $\bar{\epsilon}$, con facili calcoli ⁽²⁾ risulta

$$\bar{\epsilon} = \frac{\mu^2 E^2}{3kT} .$$

(2) P. DEBYE: *Polare Molekeln*, p. 25.

Soluto	c in mole/litro	\sqrt{c}	$\Phi(k_2) \cdot 10^{-10}$ in C.G.S.
KCl	3,60	1,89	— 26,8 \pm 2,0
KCl	1,80	1,34	— 37,4 \pm 1,9
NaNO ₃	4,02	2,00	— 26,0 \pm 2,1
NaNO ₃	2,01	1,41	— 38,9 \pm 1,8
KNO ₃	2,85	1,68	— 26,2 \pm 2,0
KNO ₃	1,42	1,19	— 35,8 \pm 2,2
NaIO ₃	0,19	0,44	— 59,3 \pm 5,0
NaIO ₃	0,09	0,31	— 49,7 \pm 5,0
KIO ₃	0,19	0,44	— 82,9 \pm 3,3
KIO ₃	0,09	0,31	— 78,2 \pm 2,9
Na ₂ SO ₄	0,87	0,93	— 60,5 \pm 2,1
Na ₂ SO ₄	0,43	0,66	— 81,2 \pm 2,5
K ₂ SO ₄	0,57	0,75	— 106,0 \pm 2,4
K ₂ SO ₄	0,28	0,53	— 117,5 \pm 2,3
Na ₂ C ₂ O ₄	0,25	0,50	— 107,8 \pm 2,1
Na ₂ C ₂ O ₄	0,13	0,36	— 121,1 \pm 1,9
K ₂ C ₂ O ₄	0,94	0,97	— 83,8 \pm 2,0
K ₂ C ₂ O ₄	0,47	0,68	— 92,2 \pm 2,2
Na ₃ PO ₄	0,31	0,56	— 81,9 \pm 4,1
Na ₃ PO ₄	0,14	0,38	— 88,1 \pm 3,9
Saccarosio	0,86	—	— 16,3
Saccarosio	0,43	—	— 20,8
Mannite	0,61	—	— 20,4
Mannite	0,31	—	— 29,0

Ricordando che il campo è prodotto da un ione di carica ze si ha che l'energia media di tutti i dipoli che si trovano a distanza r dall'ione è data da

$$\bar{\varepsilon}' = \frac{\mu^2}{3kT} \cdot \frac{z^2 e^2}{r^4}$$

e quindi l'energia delle molecole di solvente che si trovano in uno strato sferico $4\pi r^2 dr$, indicando con n il numero di dipoli del solvente per unità di volume del liquido, è data da

$$dE = n \frac{\mu^2 z^2 e^2}{3kT} \cdot \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr$$

e l'energia media totale che si ha relativamente ad un singolo ione

$$E = n \frac{\mu^2 z^2 e^2}{3kT} 4\pi \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Consideriamo, in prima approssimazione, che si possa integrare fino all' ∞ ; si ha allora

$$E = \frac{4\pi}{3} n \frac{\mu^2 z^2 e^2}{kT} \frac{1}{r_m}.$$

Questa è l'energia relativa ad un singolo ione; bisogna ora considerare che, se la concentrazione è $c [= (m/M)(1/V)]$ nella unità di volume vi sono Nc molecole di soluto, dove N è il numero di AVOGADRO.

Dunque l'energia libera F' relativa alla unità di volume della soluzione è

$$F' = \frac{4\pi}{3} Ncn \frac{\sum_i m_i z_i^2}{kT} \frac{\mu^2 e^2}{r_m},$$

in cui m è il numero degli ioni dello stesso tipo e z è il numero delle cariche portate da ogni ione.

Passiamo ora all'energia libera parziale F , e per ottenerla bisogna, secondo la definizione, eseguire la derivata della grandezza F' rispetto al numero di mole n_2 per unità di volume di soluzione, numero che è dato da $n_2 = m/M$.

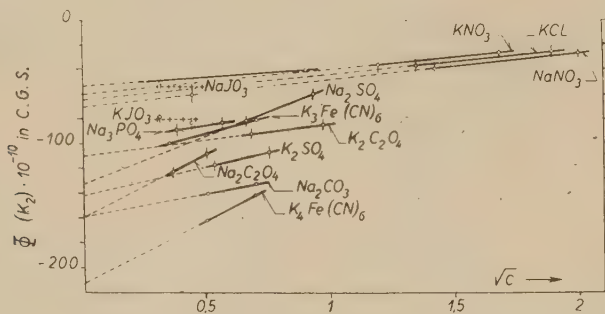


Fig. 1.

L'energia libera parziale molare è data dunque da

$$F = \frac{\partial F'}{\partial n_2} = \frac{\partial F'}{\partial (m/M)} = \frac{4\pi}{3} Nn \frac{\sum_i m_i z_i^2}{kT} \frac{\mu^2 e^2}{r_m V},$$

dove V è il volume della soluzione. Questo è dunque il termine che bisogna aggiungere all'energia libera in dipendenza delle azioni attrattive degli ioni sui dipoli del solvente. Per passare alla compressibilità della soluzione, bisogna derivare due volte rispetto a p , secondo quanto è già ben noto; ora nella espressione precedente compare V^{-1} , e quindi, derivando rispetto a p , si ha certamente un valore diverso da zero per ciò che riguarda tale derivata; c'è poi nella formula anche l'espressione r_m^{-1} , e tale distanza minima r_m può considerarsi certamente come variabile al variare della pressione a cui è sottoposta

la soluzione. Una valutazione di tale variazione si presenta, evidentemente, piuttosto difficile. Noi vogliamo qui soltanto notare che questo termine non dipende dalla concentrazione e quindi influenza il termine noto; inoltre, se la valutazione di questo termine si presenta alquanto difficile, pure è da osservare che esso è proporzionale all'espressione $\sum_i m_i z_i^2$ e quindi è da aspettarsi che, *in linea di massima*, i valori dei termini noti crescano passando dai sali 1-1 ai sali 1-2; 1-3; 1-4. In effetti, considerando i gruppi di sali già sperimentati, ed includendo ancora un altro sale trivalente, e cioè Na_3PO_3 , come si vede dalla fig. 1 si riscontrano valori crescenti per il termine noto man mano che aumentano le cariche portate dagli ioni.

Noi abbiamo ancora tracciato la curva relativa alla variazione di compressibilità per la mannite ed il saccarosio, in modo da avere due sostanze non elettrolitiche. Ora le rette sperimentali, che per queste sostanze sono in funzione di c e non di \sqrt{c} (v. fig. 2), hanno termine noto molto più piccolo, secondo quanto era da prevedersi, dato che in queste soluzioni non elettrolitiche deve mancare l'azione attrattiva sui dipoli del solvente.

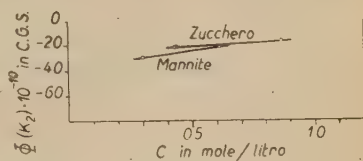


Fig. 2.

SUMMARY

The compressibilities of some electrolytic solutions, having ions of different valency, are measured, in function of the concentration, by measuring the velocity of the ultrasounds. It appears firstly that salts anomalous in the order of the electrolytic conductivity are alike anomalous in the order of compressibility, and that besides a specific ionic action must be considered not taken into account by DEBYE's theory and which makes its influence felt on the variation of compressibility.

Sul problema della generazione dei mesoni e l'effetto di latitudine.

M. FERRETTI SFORZINI

Istituto di Fisica della Università

Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto l'8 Marzo 1950)

Riassunto. — Si considerano i mesoni che arrivano al livello del mare come secondari di protoni generati nell'atmosfera dopo un percorso di un metro di pressione, e si calcola la funzione $\Lambda(W, \lambda, E)$ che determina il numero di mesoni che giungono al livello del mare alla latitudine λ , essendo stati generati con energia E da un nucleone di energia W , e provenienti da tutte le direzioni. Si calcola poi la funzione $F(W, E)$ di generazione dei mesoni nell'ipotesi della produzione multipla di WATAGHIN. Dai valori ottenuti per F e per Λ si risale al calcolo dell'intensità totale relativa della radiazione mesonica, in funzione della latitudine, e si fa il confronto di tali risultati coi dati sperimentali.

Introduzione.

Come è noto i mesoni che si trovano nella radiazione cosmica sono considerati particelle secondarie (a causa della loro breve vita media); e si pensano creati da una radiazione primaria, prevalentemente nell'alta atmosfera. Si ritiene ora più comunemente che i primari dei mesoni siano protoni, e il processo della generazione dei mesoni si pensa dovuto all'urto di tali protoni contro i nuclei dell'ossigeno e dell'azoto che costituiscono l'aria atmosferica.

Un problema importante relativo alla generazione dei mesoni è la determinazione della funzione di generazione $F(E, W)$ se $F(E, W)dE$ rappresenta il numero di mesoni creati con energia compresa tra E ed $E + dE$, e W è la energia dei protoni.

Un metodo ragionevole per lo studio della dipendenza della generazione dei mesoni dalla energia dei nucleoni incidenti consiste nello sfruttare le conoscenze acquisite attraverso i dati sperimentali sugli effetti geomagnetici in

generale. Nel presente lavoro si è preso in particolare considerazione l'effetto di latitudine.

Un lavoro analogo al presente è stato pubblicato nel 1947 da JANOSSY e NICOLSON ⁽¹⁾. Nella presente ricerca si è trattato il problema della generazione dei mesoni da un punto di vista alquanto diverso da quello dei predetti AA., e si è poi cercato di applicare i risultati ottenuti alla teoria della produzione multipla di WATAGHIN. In una prossima ricerca si applicheranno questi calcoli alla teoria di HEISENBERG.

Si è ritenuto opportuno eseguire questi calcoli, perchè si è pensato che la dipendenza della funzione di generazione dalla energia dei nucleoni incidenti dovesse essere più critica per tali teorie che la dipendenza dalla energia dei mesoni prodotti: questo punto di vista è stato confermato dai risultati ottenuti nel presente lavoro.

Il procedimento seguito consiste nel calcolare dapprima la funzione $\Lambda(W, \lambda, P_1, E)$ che ci darà il numero dei mesoni che giungono al livello del mare alla latitudine λ , essendo stati generati con energia E da un nucleone di energia W , a una pressione barometrica P_1 nell'atmosfera, provenienti da tutte le possibili direzioni di incidenza. (Questo calcolo è comune premessa alla verifica di tutte le ipotesi di generazione).

È stata poi calcolata con qualche semplificazione la funzione di generazione $F(E, W)$ secondo l'ipotesi di WATAGHIN nel sistema dell'osservatore. Noti F e Λ si è calcolata la intensità totale relativa della radiazione mesonica in funzione della latitudine. I risultati ottenuti saranno discussi alla fine del presente lavoro.

1. — Calcolo della funzione Λ .

Premettiamo una osservazione generale: se E è la energia dei mesoni prodotti nell'urto di due nucleoni, e se consideriamo solamente i mesoni dotati di grande energia (gli altri non arrivano al livello del mare) si può vedere con un semplice calcolo che la direzione del mesone differisce in generale assai poco da quella del primario che lo genera. (D'altra parte, se tale direzione fosse molto diversa non si troverebbe apprezzabile effetto est-ovest al livello del mare).

Assumiamo allora come ipotesi che tutti i mesoni che ci interessano camminino nella direzione del primario che li ha generati, e consideriamo le possibili direzioni di provenienza dei mesoni in un punto P della crosta terrestre.

I protoni primari di energia W , a causa del campo magnetico terrestre,

(1) L. JANOSSY e P. NICOLSON: *Proc. Roy. Soc.*, **192**, 99 (1947-48).

possono arrivare in corrispondenza di P soltanto da certe direzioni contenute entro un cono che chiameremo «cono B » per comodità. I mesoni prodotti con energia E da questi protoni possono arrivare in P solo in direzioni non troppo inclinate dato l'assorbimento atmosferico, e le direzioni possibili saranno contenute entro un cono di semiapertura α che chiameremo «cono A ». Evidentemente nel punto P potranno arrivare solamente i mesoni di energia E prodotti dai protoni di energia W contenuti nella porzione comune ai due coni A e B (¹).

Supponiamo ora che tutti i mesoni siano formati dai protoni primari dopo un percorso entro l'atmosfera di un metro d'acqua di pressione, e supponiamo ancora che la perdita di energia sia costante. (In realtà i mesoni sono formati a tutte le altezze, ma il grosso di essi, come è noto, si forma a 1 metro di acqua e meno, e ciò tanto più per direzioni molto inclinate). Essendo l'atmosfera equivalente a 10 metri di acqua di pressione, se chiamiamo con j la perdita di energia lungo una direzione inclinata di α sulla verticale, sarà $\bar{E} = (9m/\cos \alpha)j$.

Potranno quindi arrivare al livello del mare solo i mesoni che hanno energia maggiore di \bar{E} e che non si disintegrano in cammino.

Se chiamiamo $p(E, \alpha)$ la probabilità che un mesone non si disintegri in cammino, il numero totale dei mesoni che arrivano da tutte le direzioni con tutte le energie, sarà

$$\int_{\Delta\Omega} d\Omega \int_{\bar{E}}^{\infty} \psi(E, \alpha, \beta) dE \cdot p(E, \alpha),$$

dove

$$\psi(E, \alpha, \beta) = \int_{W_{min}}^{\infty} g(W, \alpha, \beta) dW \cdot F(E, W),$$

in cui $g(W, \alpha, \beta) d\Omega dW$ è il numero dei primari che arrivano nell'atmosfera entro un cono elementare di apertura $d\Omega$, e aventi energie comprese tra W e $W + dW$, α e β essendo gli angoli che definiscono la direzione dell'asse del cono, ed $F(E, W)$ la funzione di generazione.

La funzione $g(W, \alpha, \beta)$ è uguale a zero ovunque fuori del cono B ; ed è uguale a $G(W)$ entro il cono B : come è noto, è $G(W) = G_0/W^{2.6}$ dove G_0 è una costante.

La funzione $p(E, \alpha)$ è ben nota, ed è data da

$$p(E, \alpha) = \left(\frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{E_T}{E} \right)^{(H/\zeta)(\mu_0 c/E_1 \tau_0)},$$

in cui si è posto $\zeta = \cos \alpha$; P_0 = pressione atmosferica al livello del mare, P_1 = pressione nel punto in cui il mesone viene generato, H = altezza totale

dell'atmosfera, μ_0 = massa del mesone, E_T = energia finale con cui i mesoni arrivano sulla superficie della terra, τ_0 = vita media del mesone a riposo, e E_1 = all'energia che il mesone dovrebbe avere se fosse stato generato al top dell'atmosfera, per arrivare al livello del mare nelle medesime condizioni.

Cambiando l'ordine di integrazione, calcoleremo per prima cosa

$$\int_{\Delta\Omega} p(E, \alpha) d\Omega.$$

Trascurando in un primo tempo l'effetto di penombra (assumendo che tutte le direzioni che non cadono entro il cono proibito di STOERMER siano permesse) si trova che la parte $\Delta\Omega$ comune ai due coni A e B è data da

$$(1) \quad 2 \int_{\arccos \frac{9_f}{E}}^{\frac{\pi}{2} - \omega} \arccos \frac{\cos \omega}{\sin \alpha} \sin \alpha d\alpha,$$

dove ω è dato dalla equazione di STOERMER

$$(2) \quad \cos \omega = \frac{2}{\rho \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda}{\rho^2}.$$

In tale formula:

$\rho = r_0/R$, r_0 = raggio terrestre = $6 \cdot 10^8$ cm;

$R = \sqrt{\frac{e\mathcal{M}}{Mve}}$; $Mve \sim W$; $e\mathcal{M} = 2,5 \cdot 10^{28}$ eV cm²; \mathcal{M} = momento magnetico della Terra.

È viceversa ben noto che la maggior parte delle direzioni che si trovano nel cono di penombra sono proibite.

D'altra parte (a parte l'effetto nord-sud che trascureremo in questi calcoli) le direzioni che sono entro il cono di apertura ω' dato dalla equazione

$$(3) \quad \cos \omega' = \frac{1,57}{\rho \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda}{\rho^2},$$

sono tutte permesse ⁽²⁾. In un primo tempo si è tentato di calcolare Λ ponendo al posto di ω , nella (1), il valore dato da (2) e poi quello dato da (3): i valori ottenuti in questo modo per Λ differivano però a nostro giudizio di troppo, per cui si è deciso di assumere come cono B il « main cone » di LEMAITRE e VALLARTA. In questo caso si ha

$$\Delta\Omega = -2\pi \int_{l_f/E}^0 f(\rho, \alpha) d\zeta,$$

(2) M. S. VALLARTA: *Phys. Rev.*, **44**, 1 (1933).

in cui le notazioni sono quelle sopra riferite; $d\zeta = \sin \alpha d\alpha$ e $f(\rho, \alpha)$ è data in base ai calcoli di LEMAITRE e VALLARTA da curve pubblicate su un lavoro di JOHNSON ⁽³⁾ per i valori $\lambda = 0^\circ$, $\lambda = 20^\circ$, $\lambda = 30^\circ$.

Mediante integrazione numerica si sono ottenuti i valori di Λ riportati nelle tabelle I, II e III.

TABELLA I. - $\Lambda(W, E, \lambda)$ per $\lambda = 0^\circ$.

$\begin{matrix} W \\ E \end{matrix}$	10	12	14	16	18	20	25	30
2	0	0	.00105	.0030	.0034	.0039	.0039	0.039
2,5	0	.00046	.0088	.0179	.0213	.0248	.0275	.0275
3	0	.0035	.0208	.0371	.0443	.0519	.0605	.0621
4	0	.0117	.0447	.0736	.0866	.1029	.1232	.1308
5	0	.0191	.0665	.1053	.1254	.1463	.1774	.1920
10	0	.0499	.1356	.2023	.2393	.2745	.3408	.3763

TABELLA II. - $\Lambda(W, E, \lambda)$ per $\lambda = 20^\circ$.

$\begin{matrix} W \\ E \end{matrix}$	10	12	14	16	18	20	25	30
2	0	.00085	.0024	.0036	.00385	.00385	.00385	.00385
2,5	0	.00765	.0159	.0220	.0269	.0271	.0276	.0276
3	.00013	.0183	.0338	.0457	.0565	.0577	.0620	.0620
4	.00277	.0399	.0688	.0911	.1123	.1157	.1300	.1313
5	.0060	.06105	.0997	.1305	.1603	.1658	.1892	.1927
10	.0225	.1291	.1976	.2524	.3061	.3182	.3704	.3849

(³) T. JOHNSON: *Rev. Mod. Phys.*, **10**, 193 (1938).

TABELLA III. - $\Lambda(W, E, \lambda)$ per $\lambda = 30^\circ$.

$W \backslash E$	10	12	14	16	18	20	25	30
2	.00157	.0035	.0038	.0038	.0038	.0038	.0038	.0038
2,5	.01125	.0221	.0247	.0274	.0276	.0276	.0276	.0276
3	.0279	.0476	0.528	.0592	.0613	.0620	.0620	.0620
4	.0630	.0977	.1073	.1201	.1270	.1303	.1309	.1309
5	.0965	.1432	.1561	.1738	.1860	.1918	.1939	.1939
10	.2071	.2857	.3103	.3400	.3640	.3815	.3983	.3983

2. - Calcolo della funzione $F(E, W)$.

Dobbiamo ora trovare una espressione che rappresenti la $F(E, W)$ nella ipotesi della produzione multipla di WATAGHIN.

Se il numero di mesoni generati per elemento di angolo solido, e nel sistema del baricentro, è $f(E_0) dE_0 (d\Omega/4\pi)$, si ottiene per $F(E)$, applicando una trasformazione di LORENTZ, la seguente espressione:

$$F(E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{1 + \beta_0 \xi}{\sqrt{1 + \beta_0^2}} \cdot E\right) \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \beta_0 \xi} d\xi,$$

dove $\beta_0 = v_0/c$ e $\xi = \cos \vartheta$ (ϑ è l'angolo formato dalla direzione dei protoni con quella dei mesoni nel sistema dell'osservatore) e v_0 è la velocità dei protoni rispetto al sistema del baricentro. (In tali calcoli si è trascurato $\mu_0^2 c^4$ di fronte a E^2 , dato che le particelle che ci interessano sono ultrarelativistiche).

Per l'ipotesi di WATAGHIN ^(*), la funzione $f(E_0)$ nel sistema del baricentro decresce rapidamente con legge esponenziale ad energie maggiori di $2\mu_0 c^2$, ed ha un massimo acuto intorno a un valore \bar{E}_0 dell'ordine di grandezza di $2\mu c^2$. Tale comportamento può essere abbastanza bene approssimato mediante una δ di DIRAC, e si può scrivere:

$$f(E_0) = f_0 \delta(E_0 - \bar{E}_0),$$

(*) G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948).

dove \bar{E}_0 è la energia media con cui vengono emessi i mesoni nel sistema del baricentro, f_0 è il numero di mesoni emessi e δ è il simbolo della funzione di DIRAC.

Sarà allora

$$(4) \quad F(E) = \frac{1}{2} f_0 \int_{-1}^{+1} \delta \left(\frac{E(1 - \beta_0 \xi)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} - \bar{E}_0 \right) \cdot \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \beta_0 \xi} d\xi.$$

Questa espressione si annulla dappertutto, tranne che per certi valori di E compresi tra un E_{max} e un E_{min} dipendenti dalle limitazioni dell'integrale precedente. Si ha:

$$(5) \quad \begin{cases} E_{max} = \frac{\bar{E}_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 - \beta_0} \\ E_{min} = \frac{\bar{E}_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{1 + \beta_0} \end{cases}$$

Con facili sostituzioni, si eseguisce l'integrazione che compare al secondo membro della (4) e si ottiene infine:

$$(6) \quad F(E) = 1/2 f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{\beta_0 \bar{E}_0}.$$

Bisogna ora esprimere $F(E)$ come funzione di W anzichè di β_0 .

Ora, se M è la massa di un protone che arrivi in un punto P della Terra, e se $\beta_0 c$ è la sua velocità nel sistema del baricentro, la sua energia cinetica in questo sistema è data da

$$W_0 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} - Mc^2$$

e l'energia cinetica nel sistema dell'osservatore risulta essere

$$W = \frac{(W_0 + Mc^2)(1 + \beta_0^2)}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} - Mc^2.$$

Si può allora calcolare β_0 in funzione della energia primaria W dei protoni rispetto all'osservatore, e si ha

$$\beta_0^2 = \frac{W}{W + 2Mc^2}.$$

Dalle (5) e (6) (con alcuni passaggi algebrici che involgono lo sviluppo in serie di due radicali arrestato al secondo termine, e ammettendo che W sia

molto maggiore di Mc^2) si ottiene:

$$(7) \quad E_{max} = \sqrt{2} \cdot E_0 \sqrt{\frac{W + Mc^2}{Mc^2}},$$

$$(8) \quad F(W, E) = \frac{Mc^2}{E_0^2} \cdot \frac{\sqrt{W + 2Mc} - \sqrt{2Mc}}{\sqrt{W}}.$$

In questa ultima equazione si è preso per f_0 l'espressione

$$f_0 = \frac{2 \left[\frac{Mc^2}{1 - \beta_0^2} - Mc^2 \right]}{E_0},$$

il cui numeratore rappresenta la energia totale disponibile nel sistema del baricentro, ed E_0 l'energia di ciascun mesone ⁽⁵⁾.

3. - Calcolo della intensità totale in funzione della latitudine.

Non resta ora che da effettuare il calcolo dell'integrale

$$\int_{W_{min}}^{\infty} F(W, E) \cdot G(W) \cdot \Lambda(W, E, \lambda) dW$$

(P_1 si è preso costantemente uguale a un metro di acqua di pressione), dove $G(W)$ dà il numero di mesoni primari indipendentemente dall'effetto di latitudine, ed è, come si è già ricordato, $G(W) = G_0/W^{2,6}$.

Mediante le tabelle I, II e III, e normalizzando a $G_0 = 1$, è possibile calcolare la funzione $G(W) \cdot \Lambda(W, E, \lambda)$ per le tre latitudini considerate.

La formula (8) che dà l'espressione di $F(W, E)$ è valida per ogni W minore di W_{min} dove con W_{min} si indica l'energia minima capace di produrre mesoni di energia E .

L'espressione di W_{min} si ricava facilmente da quella di E_{max} (7) e si ha

$$W_{min} = \left(\frac{E^2}{2E_0^2} - 1 \right) Mc^2,$$

espressione valida per W_{min} molto maggiore di Mc^2 date le approssimazioni del calcolo nello sviluppo in serie dei radicali.

⁽⁵⁾ Il valore di f_0 dato da WATAGHIN è in realtà leggermente più piccolo perchè egli tiene conto di una energia cinetica residua dei nucleoni dell'ordine di $0,1 Mc^2$. Questa differenza però non ha alcuna influenza pratica sulle nostre conclusioni.

Può essere interessante vedere quali sono i valori numerici di W_{min} per vari valori di E , sia nella ipotesi di WATAGHIN per cui $\bar{E}_0 = 0,25$ GeV, che prendendo $\bar{E}_0 = 0,45$ GeV (questo valore si è preso per comodità di calcolo).

TABELLA IV. — W_{min} .

$E =$	2	2,5	3	4	5	10
$\bar{E}_0 = 0,25$	31	48	71	127	199	799
$\bar{E}_0 = 0,45$	9	14,625	21,5	39		

(Nella tabella riportata tutte le energie sono espresse in GeV).

Ricordando allora che la $F(E, W)$ è nulla per valori di W inferiori a W_{min} ed ha la espressione (8) per valori di W superiori a W_{min} , si calcola facilmente il valore di tale funzione di W , e dai valori ottenuti si risale ai valori del prodotto $F(W, E) \cdot G(W) \cdot \Lambda(W, E, \lambda)$.

Poichè i valori di W_{min} come si vede dalla tabella sono molto alti nel caso di $\bar{E}_0 = 0,25$ GeV, e sono tali che per essi non si ha più nessun effetto del campo magnetico terrestre (l'effetto di latitudine sarebbe in questo caso rigorosamente nullo), si sono proseguiti i calcoli soltanto per il valore $\bar{E}_0 = 0,45$ GeV.

Dobbiamo eseguire ora l'integrale

$$(10) \quad I(\lambda) = \int_{\bar{E}}^{\infty} dE \int_{W_{min}}^{\infty} F \cdot G \cdot \Lambda \cdot dW$$

che ci darà la intensità in funzione della latitudine. Tale integrale si può anche scrivere:

$$(11) \quad I(\lambda) = \int_{2\text{GeV}}^{\infty} dE \int_{W_{min}}^{\infty} F \cdot G \cdot \Lambda \cdot dW.$$

Osserviamo ora che per W tendente all'infinito la funzione Λ diviene indipendente dalla latitudine. Si rileva dalla tab. III che già per $W = 30$ GeV alla latitudine di 30° siamo assai vicini al valore di $\Lambda(W)$ corrispondente a $\Lambda(\infty)$. Quindi per E variabile da 2 a 10 GeV l'andamento della funzione $\Lambda(\infty, E)$ è praticamente uguale all'andamento della funzione $\Lambda(30, E, 30^\circ)$.

Secondo quanto risulta dalla tabella IV, per $\bar{E}_0 = 0,45$ GeV, W_{min} supera notevolmente i 30 GeV già per E maggiore o uguale a 4 GeV. Il calcolo del-

l'integrale (11) si può allora spezzare, per comodità, come segue:

$$(12) \quad I(\lambda) = \int_2^{3,6} dE \int_{W_{min}}^{30} F \cdot G \cdot \Lambda \cdot dW + \int_2^{3,6} dE \cdot \Lambda(\infty, E) \int_{30}^{\infty} F(W, E) \frac{dW}{W^{2,6}} + \\ + \int_{3,6}^{\infty} dE \cdot \Lambda(\infty, E) \int_{W_{min}}^{\infty} F(W, E) \frac{dW}{W^{2,6}}.$$

Il valore 3,6 per E_{max} relativo a un $W = 30$ si deduce dalla (9). Solo il primo addendo della espressione (12) dipende dalla latitudine: esso si calcola numericamente in base ai dati tabulati, e i suoi valori per le tre latitudini di 0° , 20° e 30° sono rispettivamente 0,000368; 0,000405; 0,000432.

Gli altri due addendi sono indipendenti dalla latitudine. Per il secondo si trova il valore 0,00070 e per il terzo 0,00391.

I tre valori dell'integrale (12) per le tre latitudini considerate sono quindi:

$$\int_{2\text{GeV}}^{\infty} dE \int_{W_{min}}^{\infty} F \cdot G \cdot \Lambda \cdot dW = \begin{cases} 0,00498 & \text{per } \lambda = 0^\circ \\ 0,005015 & \text{per } \lambda = 20^\circ \\ 0,00504 & \text{per } \lambda = 30^\circ. \end{cases}$$

Discussione.

I risultati dei calcoli mostrano che anche per una energia media dell'ordine di 0,45 GeV nella ipotesi che tutti i mesoni siano emessi nel sistema del baricentro con energia uguale, l'effetto di latitudine risulterebbe inferiore a un terzo di quello osservato.

La ragione di un tale risultato appare abbastanza semplice; la energia media dei mesoni che arrivano al livello del mare deve essere di alcuni GeV. Ora, nella ipotesi che tali mesoni nel sistema del baricentro non abbiano energia cinetica molto superiore a quella di riposo (0,1 GeV) bisogna ammettere che la velocità del baricentro sia molto prossima a quella della luce. Da ciò consegue che l'energia W dei primari dei mesoni capaci di arrivare al livello del mare è troppo elevata per sentire sensibilmente l'effetto del campo magnetico terrestre.

I calcoli precedenti mostrano che l'effetto di latitudine può essere solo dovuto a mesoni che abbiano già nel sistema del baricentro energie dell'ordine del GeV e che pure siano generati da protoni di energia dell'ordine di una decina di GeV. Tali mesoni, per dar ragione dell'entità dell'effetto osservato, non devono essere in numero trascurabile rispetto al numero totale dei mesoni prodotti, e quindi appare senz'altro come la legge esponenziale con la quale

secondo WATAGHIN decrescerebbe il numero dei mesoni in funzione della energia nel sistema del baricentro sia difficilmente compatibile con l'effetto di latitudine.

Sotto questo punto di vista la legge di potenza proposta da HEISENBERG sembra più promettente.

Ringrazio vivamente BRUNO FERRETTI per avermi suggerito l'argomento di questo lavoro, e per i consigli e l'incoraggiamento costante datomi durante il suo svolgimento.

SUMMARY

The number $\Lambda(W, \lambda, E)$ of mesons which arrive, at sea-level from all possible directions, and which have been generated with an energy E by a nucleon of energy W at a latitude λ , has been calculated. Using this number, which is independent of any particular hypothesis of mesons production, the total intensity of meson radiation at sea-level has been calculated as a function of the latitude, using the WATAGHIN hypothesis of production. Experimental results are compared with the results of calculation.

Sulla distribuzione laterale delle particelle negli sciami estesi dei raggi cosmici in aria.

C. MILONE, S. TAMBURINO e G. VILLARI

Istituto di Fisica dell'Università di Catania

(ricevuto il 15 Marzo 1950)

Riassunto. — Misure con contatori di G.M. sono state eseguite a Catania (35 m s.l.m.) per studiare la distribuzione laterale delle particelle penetranti negli sciami estesi dei raggi cosmici e confrontarla con quella degli elettroni. Si sono ottenuti i seguenti risultati: 1) Il rapporto particelle penetranti/elettroni è circa il 3 % nella parte centrale dello sciame e non varia quando la densità in tale regione varia da 35 a 105 m⁻². 2) Selezionando sciami aventi nella parte centrale una densità media di 35 particelle m⁻² si è trovato che il rapporto

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{\text{densità delle particelle penetranti a distanza } r \text{ dall'asse dello sciame}}{\text{densità degli elettroni a distanza } r \text{ dall'asse dello sciame}}$$

aumenta leggermente col crescere della distanza r ed assume per $r=50$ m un valore 1,6 volte maggiore di quello che ha per $r=0$.

1. — Introduzione.

Esperienze di diversi autori ⁽¹⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾, hanno mostrato che le particelle penetranti presenti negli sciami estesi della radiazione cosmica costituiscono qualche per cento del numero totale delle particelle componenti gli sciami. Sono stati ottenuti a bassa quota s.l.d.m. valori che variano fra 2 e 3 %. La geometria degli apparati usati nelle esperienze sopracitate era tale che venivano registrate in massima parte particelle penetranti appartenenti a sciami estesi i cui assi cadevano nelle vicinanze del rivelatore delle particelle pene-

⁽¹⁾ G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **75**, 1063 (1949).

⁽²⁾ D. BROADBENT e L. JANOSSY: *Proc. Roy. Soc., A* **191**, 517 (1947).

⁽³⁾ B. CHOWDHURI: *Nature*, **161**, 680 (1948).

tranti stesse: i valori percentuali sopra riportati si riferiscono pertanto solo alla parte centrale dello sciame.

Qui riferiamo su misure eseguite a Catania (35 m s.l.d.m.) per studiare come varia la percentuale delle particelle penetranti in funzione della distanza dalla parte centrale dello sciame.

Misure analoghe sono state eseguite da G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN ⁽⁴⁾ alla quota di 3260 m s.l.d.m.

2. - Dispositivo sperimentale e risultati.

Il dispositivo sperimentale era costituito da tre gruppi di contatori di GEIGER *A*, *B*, *C* (fig. 1) destinati a rivelare gli sciami estesi la cui parte centrale cade in buona percentuale nei pressi di *A*, *B*, *C* (vedi discussione al n. 5) e da un gruppo di contatori *P* destinato a rivelare le particelle penetranti associate cogli sciami.

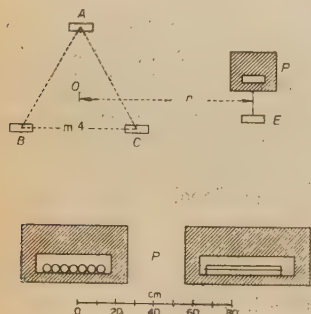


Fig. 1. - Schema della disposizione dei gruppi di contatori *A*, *B*, *C*, *P*, *E*.

Tutti i contatori avevano pareti di ottone di 1 mm di spessore, superficie di $5 \times 28 \text{ cm}^2$ ed erano riempiti con miscela di argon ed alcool.

I tre gruppi di contatori *A*, *B*, *C* erano disposti in un piano orizzontale, ai vertici di un triangolo equilatero di $m = 4$ di lato, entro un'ampia sala dell'Istituto di Vulcanologia, alla distanza di circa 7 m dal tetto, il quale aveva uno spessore di circa 10 g/cm^2 . Questo costituiva l'unico schermo per gli sciami con asse inclinato meno di 35° rispetto allo zenit; per inclinazioni maggiori facevano da schermo anche le pareti della sala, dello spessore di circa 120 g/cm^2 .

Gli eventi $A + B + C$ venivano registrati mediante un circuito di coincidenze del tipo Rossi con potere risolutivo di $2,5 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$. Il gruppo di contatori *P*, schermato con 15 cm di Pb - 0,5 cm di Fe sopra, 5 cm di Pb sotto, e 7,5 cm di Pb ai lati, veniva posto a varie distanze, r , dal centro *O* del triangolo *ABC*.

Gli impulsi di *P* venivano amplificati, e poi, attraverso un cavo schermato lungo 70 m, inviati ad un circuito di coincidenze mediante il quale venivano registrati simultaneamente gli eventi $A + B + C + P$ e $A + B + C$.

In una prima serie di misure si è mantenuta fissa la posizione del gruppo *P*

⁽⁴⁾ G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN: *Phys. Rev.*, **76**, 1020 (1949).

al centro di ABC , e si è fatta variare la superficie S di ciascuno dei gruppi di contatori A , B , C e la superficie S' del gruppo P , per vedere se si riscontravano variazioni notevoli nella percentuale di particelle penetranti al variare della densità media degli sciame estesi registrati.

In una seconda serie di misure, si sono mantenute fisse le superfici S ed S' , rispettivamente di 420 e 980 cm², e si è variata la distanza di P da ABC per determinare la variazione della percentuale delle particelle penetranti al variare della distanza dall'asse dello sciame.

I risultati delle misure, durate complessivamente 2003 ore, sono riassunti nella tabella I. Non è stata effettuata la correzione per l'effetto barometrico, perchè esso viene eliminato nei rapporti $(A + B + C + P)/(A + B + C)$. La correzione per le coincidenze casuali è stata effettuata solo per le $A + B + C$; per le $A + B + C + P$ detta correzione era trascurabile.

3. — Interpretazione dei risultati.

Rammentando che lo spettro di densità degli sciame è espresso con buona approssimazione dalla relazione

$$\nu(\Delta) = K\Delta^{-\gamma},$$

dove $\nu(\Delta)$ è la frequenza degli sciame con densità maggiore di Δ e K e γ sono costanti, la frequenza degli eventi $A + B + C$ è espressa da:

$$(1) \quad A + B + C = K \int \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^3 d\Delta.$$

Per ricavare un'analoga espressione per $A + B + C + P$ introduciamo l'ipotesi che la densità Δ_{PP} delle particelle penetranti sia proporzionale a quella degli elettroni, cioè che

$$\Delta_{PP} = R\Delta.$$

I nostri risultati e quelli di altri autori mostrano che eventuali variazioni dalla legge di proporzionalità non hanno entità tale da infirmare i risultati. Avremo quindi:

$$A + B + C + P = K \int \Delta^{-(\gamma+1)} (1 - \exp[-S\Delta])^3 (1 - \exp[-RS'\Delta]) d\Delta.$$

dove S' è la superficie dei contatori schermati.

I valori del rapporto $(A + B + C + P)/(A + B + C)$ sono stati calcolati da COCCONI e coll. ⁽¹⁾ in funzione di RS'/S per diversi valori del parametro γ e riportati in un diagramma. Servendoci di tali curve abbiamo calcolato in base ai nostri valori di $(A + B + C + P)/(A + B + C)$, S ed S' .

TABELLA I.

	S cm ²	S' cm ²	r m	Minuti	$A+B+C$	$A+B+C+P$	$\frac{A+B+C}{\text{minuti}}$	$\frac{A+B+C+P}{A+B+C}$	$R_p; (\gamma = 1,5)$
I serie	140	140	0	10 185	141	9	0,0138 \pm 0,0012	0,0637 \pm 0,0268	0,032 \pm 0,015
	280	280	0	13 185	839	53	0,0637 \pm 0,0022	0,0632 \pm 0,0105	0,0318 \pm 0,006
	420	420	0	15 728	1 410	90	0,0895 \pm 0,0024	0,0638 \pm 0,0082	0,032 \pm 0,004
II serie	420	980	0	11 700	1 035	118	0,0885 \pm 0,0027	0,1140 \pm 0,0142	0,0280 \pm 0,0042
	»	»	5	2 870	294	24	0,1020 \pm 0,0059	0,0816 \pm 0,0215	0,0180 \pm 0,0057
	»	»	15	31 440	2 740	148	0,0870 \pm 0,0016	0,0540 \pm 0,0054	0,0116 \pm 0,0011
	»	»	35	26 707	2 672	101	0,1000 \pm 0,0019	0,0378 \pm 0,0045	0,0077 \pm 0,0010
	»	»	50	8 350	796	22	0,0954 \pm 0,0033	0,0276 \pm 0,0069	0,0056 \pm 0,0013

TABELLA II.

S cm ²	S' cm ²	r m	Minuti	$A+B+C$	$A+B+C+E$	$\frac{A+B+C}{\text{minuti}}$	$\frac{A+B+C+E}{A+B+C}$	$R_e; (\gamma = 1,5)$	R_p/R_e
420	420	0	1 192	106	64	0,089 \pm 0,008	0,602 \pm 0,133	0,89 \pm 0,53	0,0314 \pm 0,0221
»	»	5	2 992	304	144	0,104 \pm 0,006	0,474 \pm 0,067	0,52 \pm 0,13	0,0346 \pm 0,0223
»	»	15	6 686	667	284	0,100 \pm 0,003	0,372 \pm 0,037	0,33 \pm 0,06	0,0351 \pm 0,0090
»	»	35	4 858	485	126	0,099 \pm 0,004	0,260 \pm 0,034	0,19 \pm 0,03	0,0403 \pm 0,0126
»	»	50	4 883	504	91	0,103 \pm 0,004	0,180 \pm 0,027	0,11 \pm 0,02	0,0514 \pm 0,0204

il corrispondente valore del rapporto R_p fra le densità Δ' di particelle penetranti alle varie distanze r e la densità totale Δ nella parte centrale dello sciame; in tale calcolo abbiamo scelto per il parametro γ il valore di 1,5. I valori di R_p così trovati sono riportati nella tabella I e nel diagramma di fig. 2.

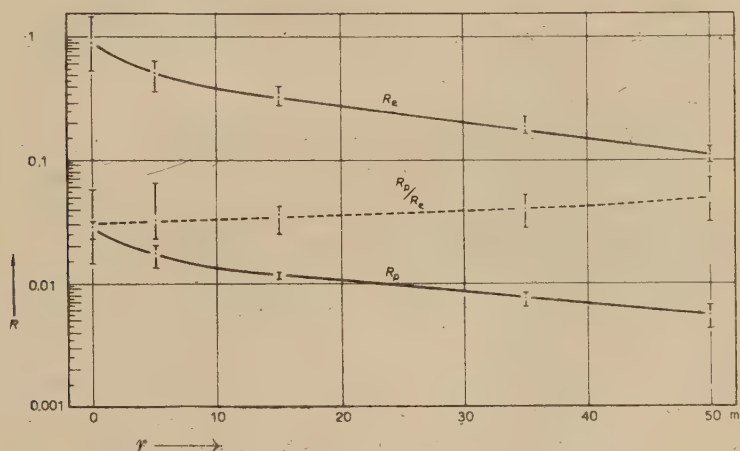


Fig. 2. — R_e , R_p , R_p/R_e in funzione della distanza r dall'asse dello sciame.

$$R_e = \frac{\text{densità degli elettroni a distanza } r}{\text{densità degli elettroni nella parte centrale dello sciame}}$$

$$R_p = \frac{\text{densità delle particelle penetranti a distanza } r}{\text{densità degli elettroni nella parte centrale dello sciame}}$$

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{\text{densità delle particelle penetranti alla distanza } r}{\text{densità degli elettroni alla distanza } r}$$

I rapporti R_e ed R_p non sono relativi ad un solo sciame ma a tutti gli sciami che danno luogo agli eventi $A + B + C$.

Tali valori mostrano che la densità delle particelle penetranti decresce coll'aumentare della distanza r dall'asse dello sciame, assumendo rispettivamente per $r = 5$; 15; 35; 50 m i valori: 0,64; 0,41; 0,27; 0,20 relativi al valore che essa ha per $r = 0$.

4. — Confronto con la distribuzione laterale degli elettroni.

Il dispositivo sperimentale adoperato non permette di stabilire come sono distribuite le particelle penetranti in un singolo sciame: i risultati precedenti si riferiscono ad una distribuzione laterale media, relativa a tutti gli sciami

che danno luogo agli eventi $A + B + C$. Per poter fare un confronto fra la distribuzione laterale delle particelle penetranti e la distribuzione laterale degli elettroni, è stata eseguita una terza serie di misure sostituendo il gruppo di contatori P (fig. 1) con un gruppo di contatori E non schermati, della superficie totale $S' = 420 \text{ cm}^2$. Tale gruppo, disposto su una terrazza e separato dalla libera atmosfera da un tetto di legno di 3 mm di spessore, veniva portato a varie distanze dal sistema A, B, C . Erano registrate contemporaneamente le coincidenze $A + B + C + E$ ed $A + B + C$. I risultati delle misure sono riportati nella tabella II.

Con procedimento analogo a quello usato nel precedente paragrafo, abbiamo ricavato i valori di $R_e = (\text{densità media degli elettroni alla distanza } r) / (\text{densità media degli elettroni nella parte centrale dello sciame})$ che riproduciamo nella tabella II e nel diagramma di fig. 2. Da tali valori si deduce che la densità degli elettroni diminuisce al crescere della distanza r dall'asse dello sciame assumendo rispettivamente per $r = 5; 15; 35; 50 \text{ m}$ i valori: 0,58; 0,37; 0,21; 0,12 relativi al valore trovato per $r = 0$. Anche questi risultati si riferiscono ad una distribuzione laterale media fra tutti gli sciami registrati; però il rapporto R_v/R_e , per un determinato valore di r , si può ritenere eguale al rapporto fra le densità delle particelle penetranti e la densità degli elettroni alla distanza r dall'asse dello sciame.

Dalle presenti misure risulta che il rapporto R_v/R_e aumenta leggermente col crescere di r come è mostrato nell'ultima colonna della tabella II e nella fig. 2.

5. - Discussione sul dispositivo sperimentale.

Per mostrare che, come è stato ammesso al n. 2, il sistema di contatori A, B, C registra in prevalenza sciami i cui assi cadono nelle vicinanze del triangolo ABC , abbiamo calcolato il contributo che apportano alle coincidenze $A + B + C$ tutti gli sciami i cui assi cadono entro determinati cerchi concentrici di centro O e di vario raggio r (fig. 3a).

Tale calcolo mostra che entro un cerchio di raggio $r = 10 \text{ m}$ cadono gli assi dell'80 % circa degli sciami registrati.

Osserviamo che nella espressione (1) della frequenza degli eventi $A + B + C$ si ammette che la densità Δ sia costante in tutto lo sciame, mentre in realtà essa decresce col crescere della distanza r dall'asse secondo la relazione (5)

$$(2) \quad \Delta = \Delta(r) = N \frac{0,454}{r} (1 + 4r) \exp [-4r^{2/3}] = Nf(r),$$

in cui N indica il numero totale di particelle dello sciame ed r , distanza dall'asse dello sciame, è misurata in « unità di scattering » ($= 74 \text{ m}$ al l.d.m.).

Ne segue che il contributo che uno sciame di N particelle dà agli eventi $A + B + C$ dipende dalla distanza r dell'asse dello sciame dal centro O del sistema di contatori ABC .

Per calcolare il contributo che apportano agli eventi $A + B + C$ gli sciami di vario N in funzione della distanza r è necessario conoscere come varia la frequenza F degli sciami estesi al variare di N .

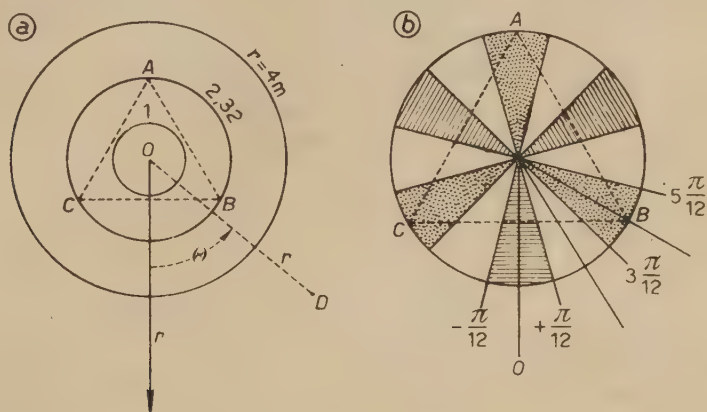


Fig. 3. - a) Schema della disposizione dei contatori A, B, C per cui si è calcolata la frequenza degli eventi $A + B + C$ dovuti a sciami i cui assi cadono entro cerchi di centro O e raggio $r = 1; 2,32; 4; \text{ecc. m}$; b) Suddivisione dell'intervallo di integrazione $O - 2\pi$, relativo all'integrale (7).

Ricordando che un buon accordo quantitativo è stato trovato fra i dati sperimentali ed i risultati della teoria a cascata ammettendo che i «primari» che danno luogo agli sciami estesi abbiano lo spettro ⁽⁵⁾

$$(3) \quad F(E) = 0,05 \left(\frac{10^{10} \text{ eV}}{E} \right)^{1,8} \text{ cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

(dove F è il numero di particelle con energia maggiore di E che giungono al limite dell'atmosfera su un cm^2 di superficie in un secondo), e che il numero N di particelle generate in un percorso l da una particella primaria di energia E è dato dalla relazione ⁽⁶⁾

$$(4) \quad N(E, l) = (1,5s + 0,5) \frac{1}{s\sqrt{l}} \exp[-l + 2\sqrt{(l-\alpha)(y-\beta)}]$$

(l è qui misurato in unità di lunghezza caratteristica $= 44,2 \text{ g/cm}^2$;

⁽⁵⁾ R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1689 (1948).

⁽⁶⁾ W. HEISENBERG: *Vorträge über kosmische Strahlung* (Berlin, 1943), p. 10.

$s = \sqrt{(l - \alpha)/(y - \beta)}$; $\alpha = 1,4$; $y = \log(E/E_j)$; $E_j = 1,03 \cdot 10^8$ eV (7)), si ricava che la frequenza $F(N)$ degli sciame aventi più di N particelle può essere espressa con buona approssimazione al l.d.m. ($l = 23,4$) dalla relazione:

$$(5) \quad F(N) = \text{cost. } N^{-x}$$

in cui il valore di x cresce al crescere di N variando da 1,22 a 1,74 quando N varia da 22 a $4,84 \cdot 10^7$ nel modo indicato nel diagramma rappresentato nella fig. 4. Tenendo presenti la (2) e la (5), la precedente relazione (1) che esprime la frequenza degli eventi $A + B + C$ risulta così modificata:

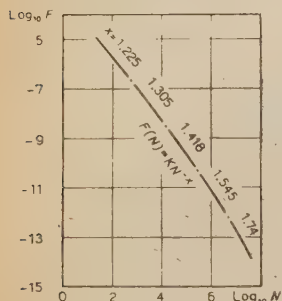


Fig. 4. - Frequenza al l. d. m. degli sciame estesi aventi più di N elettroni in funzione di N (vedi (5)), ricavata dalle relazioni (3) e (4): col crescere di N la $F(N)$ decresce via via più rapidamente.

$$(6) \quad A + B + C = \int_0^{\infty} KN^{-(x+1)} dN \times \\ \times \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} r \left[1 - \exp[-NSf(r_1)] \right] \times \\ \times \left[1 - \exp[-NSf(r_2)] \right] \left[1 - \exp[-NSf(r_3)] \right] d\theta = \\ = K \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} N^{-(x+1)} dN \int_0^{2\pi} r \left[1 - \exp[-NSf(r_1)] \right] \times \\ \times \left[1 - \exp[-NSf(r_2)] \right] \left[1 - \exp[-NSf(r_3)] \right] d\theta,$$

in cui indicando con D la traccia dell'asse dello sciame nel piano ABC , r e θ sono le coordinate polari di D in un sistema con centro in O ed asse r , ed $r_1 = AD$, $r_2 = BD$, $r_3 = CD$ (fig. 3a).

Ponendo $g_i = 1 - \exp[-NSf(r_i)]$, con $i = 1, 2, 3$, il precedente integrale in θ assume la forma:

$$\int_0^{2\pi} r \left[1 - \exp[-NSf(r_1)] \right] \left[1 - \exp[-NSf(r_2)] \right] \left[1 - \exp[-NSf(r_3)] \right] d\theta = \\ = \int_0^{2\pi} rg_1g_2g_3 d\theta.$$

Considerando la geometria del dispositivo di contatori A, B, C (fig. 3b) possiamo scrivere:

$$\int_0^{2\pi} rg_1g_2g_3 d\theta = 3 \int_{-\pi/12}^{+\pi/12} rg_1g_2g_3 d\theta + 6 \int_{\pi/12}^{3\pi/12} rg_1g_2g_3 d\theta + 3 \int_{3\pi/12}^{5\pi/12} rg_1g_2g_3 d\theta.$$

(7) L. JANOSY: *Cosmic Rays* (Oxford, 1948), p. 205.

Abbiamo eseguito il calcolo approssimato di questi tre integrali in corrispondenza di vari valori di NS e di r ($NS = 1; 0,767; 0,383; 0,23; 0,1; 0,06; 0,03; 0,01; 0,001$. $r = 1; 1,5; 2,32; 4; 6; 8; 10; 15; 20; 25; 30; 50$ m. I valori di r nel calcolo vengono espressi in unità di scattering) ammettendo che, ferma restando la coppia di valori attribuiti ad NS e ad r , il valore della funzione integranda si possa ritenere, entro il proprio intervallo d'integrazione, costante ed uguale al valore che assume nel punto medio dell'intervallo.

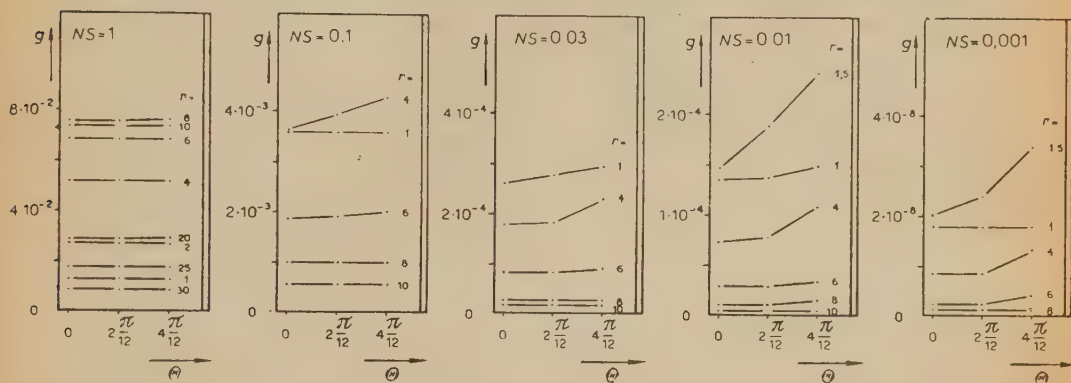


Fig. 5. — Valori della funzione $g(NS, r, \theta)$ (vedi (8)) per $\theta = 0; 2\pi/12, 4\pi/12$ e per determinati valori di NS e di r .

Se indichiamo con $g(NS, r, 0)$, $g(NS, r, 2\pi/12)$, $g(NS, r, 4\pi/12)$ i valori che la funzione $rg_1g_2g_3$ assume rispettivamente per $\theta = 0; \theta = 2\pi/12; \theta = 4\pi/12$ in corrispondenza di assegnati valori di NS e di r , la (7) assume la forma

$$(8) \quad \int_0^{2\pi} rg_1g_2g_3 d\theta \sim 3 \frac{2\pi}{12} g(NS, r, 0) + 6 \frac{2\pi}{12} g\left(NS, r, \frac{2\pi}{12}\right) + \\ + 3 \frac{2\pi}{12} g\left(NS, r, \frac{4\pi}{12}\right) = G(NS, r).$$

L'attendibilità delle ipotesi che permettono di passare dalla (7) alla (8) risulta dal fatto che i valori delle funzioni g per uno stesso valore di NS e di r , sono fra loro poco differenti, come mostrano i grafici di fig. 5, relativi ad alcuni dei valori calcolati.

Coi valori che la funzione

$$N^{-(x+1)}G(NS, r) = T(NS, r)$$

assume in corrispondenza dei prefissati valori di NS e di r , con $N = (NS)/S = NS 74^2/0,042$, abbiamo ottenuto delle curve riportando i valori di $T(NS, r)$

in funzione di N , per i vari valori del parametro r . L'area compresa fra ciascuna di tali curve e l'asse N rappresenta l'integrale

$$(9) \quad \int_0^{\infty} T(NS, r) dN = F(r).$$

Riportando infine in un sistema di coordinate cartesiane i valori di $F(r)$ in funzione di r , abbiamo ottenuto la curva riportata in fig. 6. L'area compresa fra tale curva e l'asse r rappresenta, a meno di un fattore, l'integrale:

$$(10) \quad \int_0^{\infty} F(r) dr = A + B + C.$$

Il rapporto

$$\frac{\int_0^r F(r) dr}{\int_0^{\infty} F(r) dr}$$

indica quale percentuale fra tutti gli eventi $A + B + C$ è dovuta a sciami i cui assi cadono entro un cerchio di raggio r (fig. 3a). Ponendo, con buona approssimazione

$$(11) \quad \frac{\int_0^r F(r) dr}{\int_0^{\infty} F(r) dr} \sim \frac{\int_0^r F(r) dr}{\int_0^{50m} F(r) dr} = Q(r),$$

si ottengono i valori di $Q(r) \times 100$ riportati nella tabella III. Detti valori mostrano appunto che la maggior parte degli sciami registrati hanno i loro assi nei pressi di ABC , come si è affermato nel n. 2.

TABELLA III.

r in m	$Q(r) \times 100$	r in m	$Q(r) \times 100$
1	4,71	14	91,2
2,32	23,8	16	93
4	48,9	18	96
6	65	20	97,3
8	75,5	30	99,4
10	82,5	40	99,9
12	87,5	50	100

Nel corso del precedente calcolo, si è fatto variare NS fra i limiti 0,001 e 1,2 e quindi, essendo $S = (0,042/74^2) \text{ m}^2$, si è tenuto conto solo degli sciamei aventi un numero totale N di particelle compreso fra 130 e 156 000. Ciò è lecito in quanto, col dispositivo di contatori da noi adoperato, il contributo $C(NS)$ che danno agli eventi $A + B + C$ gli sciamei di vario N risulta massimo per $N = 2610$ (valore corrispondente ad $NS = 0,02$) e decresce per

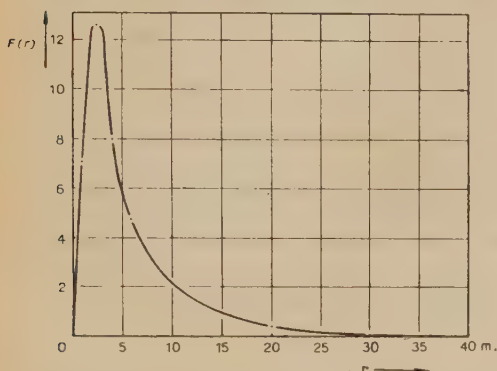


Fig. 6. - $F(r)$ (vedi (9)) in funzione della distanza r dall'asse dello sciame. Le ordinate per un determinato valore r_0 di r sono proporzionali al contributo che apportano agli eventi $A + B + C$ gli sciamei di vario N i cui assi cadono su una circonferenza di raggio r_0 . L'area compresa fra la curva e l'asse r rappresenta la frequenza degli eventi $A + B + C$ (vedi (10)). La funzione $F(r)$ è misurata in unità arbitrarie.

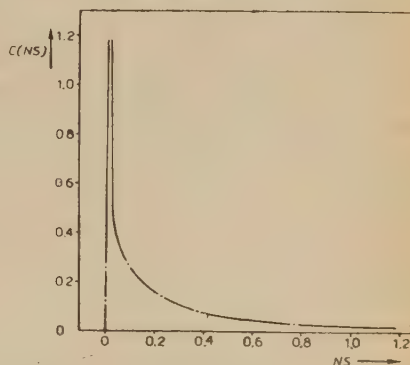


Fig. 7. - $C(NS)$ (vedi (12)) in funzione di NS . Le ordinate, per un determinato valore di NS , sono proporzionali al contributo che apportano agli eventi $A + B + C$ gli sciamei relativi a quel determinato valore di NS . L'area compresa fra la curva e l'asse NS dà, a meno di un fattore, la frequenza degli eventi $A + B + C$. La funzione $C(NS)$ è misurata in unità arbitrarie.

valori di N più grandi e più piccoli come mostra la fig. 7 in cui è rappresentato l'andamento della funzione

$$(12) \quad C(NS) = \int_0^{\infty} T(NS, r) dr$$

al variare di NS .

6. - Confronto con altri lavori e conclusione.

Misure analoghe alle nostre sono state eseguite da G. COCCONI, V. TONGIORGI COCCONI e K. GREISEN ⁽⁴⁾ alla quota di 3260 m s.l.d.m. In tali misure, sfruttando il fatto che gli elettroni e i fotoni di elevata energia appartenenti

ad uno sciame non possono essere diffusi molto lontano dall'asse, la parte centrale dello sciame veniva rivelata mediante opportuni « core selectors » i quali registravano i fotoni e gli elettroni di elevata energia associati con gli sciami estesi. La maggior parte degli sciami rivelati da un « core selector » avevano il loro « core » non più distante di 10 m dal selettore stesso.

Da questo punto di vista il sistema di contatori *ABC* nella nostra misura ha una funzione paragonabile a quella di un « core selector » nelle misure degli autori citati.

Confrontando la densità delle particelle penetranti con la densità degli elettroni a varie distanze dal « core » dello sciame gli autori citati trovano che il rapporto particelle penetranti/elettroni aumenta leggermente col crescere della distanza dal « core », ma varia solamente di circa un fattore 2 fra 5 e 100 m dal « core », mentre la densità degli elettroni decresce di un fattore 100. Tenendo conto di ciò, dell'esteso intervallo di variazione della grandezza dello sciame e degli errori della misura, gli autori concludono che la densità delle particelle penetranti a varie distanze dal « core » si può ritenere proporzionale alla densità degli elettroni.

Anche i risultati delle nostre misure indicano, come si è visto, un leggero aumento del rapporto particelle penetranti/elettroni al crescere della distanza dall'asse dello sciame. Tale rapporto cresce di un fattore 1,6 fra 0 e 50 m dall'asse. Tenendo conto degli errori statistici e sistematici della misura, concludiamo che al crescere della distanza dall'asse dello sciame la densità delle particelle penetranti non decresce più rapidamente della densità degli elettroni.

Ritenendo che le particelle penetranti che accompagnano gli sciami estesi siano per la maggior parte mesoni prodotti nell'aria, parecchie migliaia di metri al di sopra del sistema che li rivela, i precedenti risultati indicano che le particelle penetranti subiscono nell'aria una diffusione angolare non minore (e probabilmente anche maggiore) di quella degli elettroni.

Di tali conclusioni si deve tener conto nella teoria sui processi di generazione dei mesoni da parte della componente che produce, nei primi strati dell'atmosfera, elettroni e mesoni.

Ringraziamo i proff. GIUSEPPE e VANNA COCCONI per gli utili consigli datici; il prof. V. AMATO, preside della facoltà di Scienze ed il prof. G. PONTE, direttore dell'Istituto di Vulcanologia, per averci messo a disposizione i locali in cui sono state eseguite le misure.

SUMMARY

Measures with G.M. counters have been made at Catania (elevation 35 m) in order to study the lateral distribution of penetrating particles in extensive cosmic-rays air showers and compare it with that of the electrons. The following results have been obtained: 1) The ratio of penetrating particles to electrons is about 3% in the central side of the shower, and seems not to change when the mean density in this side varies from 35 to 105 m^{-2} . 2) Selecting showers which have in the central side a mean density of 35 particles m^{-2} , has been found that the ratio

$$\frac{R_p}{R_e} = \frac{\text{Density of penetrating particles at distance } r \text{ from the « shower axis »}}{\text{Density of electrons at distance } r \text{ from the « shower axis »}}$$

increases slowly with r but changes only by a factor 1,6 between $r = 0$ and $r = 50$ m.

On the measurement of the Mass of Cosmic Ray particles using a sandwich of photographic plates in a magnetic field.

Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT

Centre de Physique Nucléaire de Bruxelles

M. MERLIN

Istituto di Fisica della Università di Padova - Centro del C.N.R. per gli ioni veloci

(ricevuto il 16 Marzo 1950)

Summary. — Sandwiches of photographic plates with emulsions facing each other at a distance of 1.5 mm, were exposed in a magnetic field of 30 000 gauss at sea level. The relative position of the plates was determined by a grid of the marks produced by a thin pencil of X rays. During the preparation, exposure and processing the greatest care was taken to ensure to the plates their maximum sensitivity, and to avoid distortion of the gelatine. The radius of curvature of the track in the magnetic field, during the flight between the emulsions, is determined from the relative direction and position of the tangents at the impact points in the emulsions. When the particle ends in one of the emulsions, this measurements of momentum can be combined with a measurement of range, to calculate the mass as stated by POWELL and ROSENBLUM. When the particle passes through the two emulsions, the measurement of momentum can be combined with a measurement of grain density, in the region of energies where this parameter is sufficiently sensitive, or with a measurement of scattering, when the length of track available for measurement is sufficient.

Introduction.

In this paper are described some measurements of the mass of cosmic ray particles by the method of magnetic deflection of the track during its flight between the two plates of a sandwich of photographic emulsions, described by POWELL and ROSENBLUM ⁽¹⁾. This paper was read at the Como Congress

⁽¹⁾ C. F. POWELL and S. ROSENBLUM: *Nature*, **161**, 473 (1948); C. FRANZINETTI: *Bristol Symposium on Cosmic Rays*, 159.

on Cosmic Rays (September 1949), the above summary only being inserted in its general report.

At this congress, the very numerous and precise measurements obtained with the same method by FRANZINETTI were also presented, they have now been published ⁽²⁾. Another experiment has been described by BARBOUR ⁽³⁾.

Our results contribute to their statistics in a rather modest way. One point, however, might be stressed. POWELL and ROSENBLUM have considered the possibility of combining the determination of momentum obtained by the measurement of the radius of curvature, with a determination of the range of the particles which come to rest into one of the emulsions, so as to obtain the value of their mass.

It is shown in the following that the determination of momentum can alternatively be combined with a measurement of multiple scattering. The methods of measurement of multiple scattering have recently been improved; and in favourable conditions, are nearly as precise as the determination of range.

The measurement of scattering eliminates the rather stringent condition that the particles should reach the end of their range in one of the emulsions. It increases the number of particles suitable for measurement found in the sandwich. It will be of particular significance for the most energetic particles that are now detected by the Ilford G5 and Kodak NT4 plates, and which have ranges often greater than several centimeters.

Experimental arrangement.

We had at our disposal for this experiment the magnet of the Physical Institute of the University of Padova ⁽⁴⁾. This apparatus enabled us to ensure a rather high field strength (30 000 gauss) over a large area of plate (a circular surface of 10 cm diameter), using two sandwiches with emulsions 1.5 mm apart. A serious inconvenience was the impossibility at this time of transporting the magnet to higher altitude (Padova is at sea level) or even to remove it from its building, where a roof of 14 cm concrete was sheltering it at a distance of 10 meters. The expected intensity of mesons stopping in the emulsion was low, which was confirmed by a preliminary exposure of 12 days. A second exposure of 47 days was made.

We used Kodak NT4 electron-sensitive plates. This choice was guided by obvious advantages in using these more sensitive emulsions. It had, however, two drawbacks. The plates were amongst the first of this type to

⁽²⁾ C. FRANZINETTI: *Phil. Mag.*, **41**, 86 (1950).

⁽³⁾ I. BARBOUR: *Phys. Rev.*, **76**, 320 (1949).

⁽⁴⁾ G. SOMEDA: *Elettrotecnica*, **24**, 470 (1937).

be produced, those available to us had only a rather thin emulsion layer ($35\ \mu$). This limited thickness reduced the number of particles available for measurement, but facilitated a safe processing of the plates. The resistance of the emulsion to stripping at low temperature and in drying conditions was not known. The consequences of this second inconvenience are explained below.

The requirements of an experiment of this type are clearly more stringent than the usual demands of the nuclear emulsion technique. Maximum and constant sensitivity had to be kept during a long exposure. A more delicate point was the avoidance of any distortion of the gelatine over the whole area of the plate: usual experiments require only a local absence of distortion, in areas of a few square millimeters.

Exposure. - The frame holding the plates in position in the field is shown on fig. 1. The plates are clamped on two soft steel plates, sufficiently thick to avoid mechanical deformation.

To reduce the fading during the exposure the frame is thermically isolated from the magnet and the plates can be cooled by a continuous water flow at low temperature ($4\ ^\circ\text{C}$).

It is important to reduce the probability of a deviation of the particle by collision against an atom of the gas during the flight between the plates. The mean angle of scattering is proportional to the square root of the pressure of the gas, and to its atomic number ⁽⁵⁾. In air at atmospheric pressure and for the length of flight involved in the conditions of the experiment it introduces an appreciable error. To reduce this error, the plates were in an air-tight chamber, in which vacuum, or a low pressure hydrogen atmosphere could be maintained.

The figure 1 shows the disposition of the lead inserts, in which small holes (diameter $100\ \mu$ app.) used for X ray marking have been drilled. The X ray grid, used to define the relative position of the plates, is obtained by exposing the frame to X rays with the plates in position ⁽⁶⁾.

Development. - The greatest care was taken during the development, to ensure to the plates their maximum sensitivity. In the various stages of processing (and perhaps also during the making of the plates) distortions of the gelatine are likely to occur. We adopted the methods successfully used by DILWORTH, OCCHIALINI and VERMAESEN ⁽⁷⁾ for emulsions as thick as $1200\ \mu$. These include the use of T.D. development with a developer of low

⁽⁵⁾ E. J. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **58**, 292 (1940).

⁽⁶⁾ I. BATES and G. P. OCCHIALINI: *Nature*, **161**, 773 (1948).

⁽⁷⁾ C. C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI and L. VERMAESEN: *Bull. Centre Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 13.

alkalinity to reduce the swelling of the gelatine, a smooth fixing and a slow drying. The plates were also kept strictly horizontal during the whole processing. All tracks lying within 1 cm from the border of the plate were discarded.

Measurements.

Scanning. — With the aim of making all possible measurements by the method of magnetic deflection-range, the plates were scanned systematically to find all tracks ending their range in the emulsion. Measurement of their direction and range enabled us to locate the region of the corresponding plate where the sister track of the particle could be found, with the help of large scale maps of the two plates (Scale 20/1).

To accept two tracks as «sisters», i.e. as belonging to the same particle, the following criteria were adopted:

That at the impact points, the tracks

1) should be tangent to the same circle,

2) should have equal angles of dip,

3) should have continuity in grain count and small angle scattering.

In no case more than one track was found in a plate, which could be accepted as sister to one track of the other plate. If the cosmic ray intensity were higher in the plates it would be more difficult to identify uniquely sister tracks. A compromise must be kept between this, and the necessity of long exposures for good statistics.

Measurement of momentum. — The momentum is proportional to $H\rho/\cos\varphi$, where H is the magnetic field (gauss) ρ is the radius of curvature of the track (cm) and φ is the angle between the track and the plane of the emulsion.

The magnetic field has been measured with a precision of 1.2 %. Its

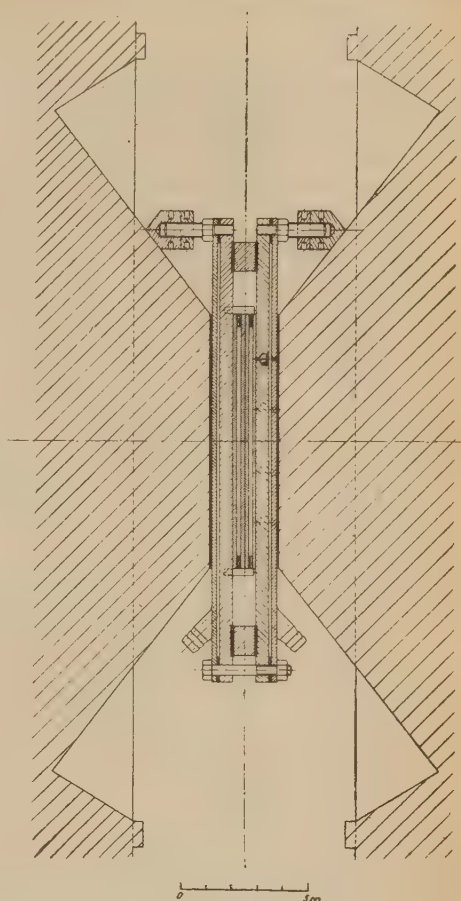


Fig. 1.

radial variation has been measured, it is 1.5 % at 3 cm from the center and 2.5 % at 5 cm; a corresponding correction has been applied according to the position of the particle. The fluctuations of the field during the exposures were kept below 0,7 %. Both the error of the determination of the field strength, and the fluctuations during the exposure, affect the precision of the values of the masses. The ratio of the masses is influenced only by the fluctuations of the field.

The projection of the trajectory of the particles during their flight between the plates on a plane perpendicular to the field, is an arc of circle. The radius of curvature is measured as follows (fig. 2).

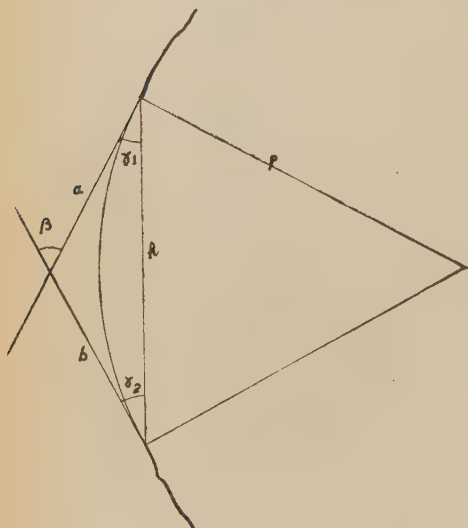


Fig. 2.

Let a and b be the projections of the tangents at the impact points in the emulsions, β their angle and h the distance between these points. The radius of curvature is

$$\rho = \frac{h}{2 \sin \beta/2}$$

and the probable error on the radius is

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cotg \frac{\beta}{2} \Delta \beta\right)^2}.$$

The first term gives usually a small contribution, h being of the order of a few centimeters, and Δh , depending mainly on the dimensions of the X ray spots, of the order of 100 μ .

The angles γ_1 and γ_2 are measured with a precision which depends, from one track to another, on the grain size and the small angle scattering near the impact points. To this error must be added the probability of a scattering during the flight between the emulsions.

In the conditions of the experiment, the track must be almost parallel to the emulsions to be sufficiently long to allow measurements of scattering to be made, or to have a reasonable chance to reach the end of its range inside the plate. The angle φ is generally small and the error $\varphi \Delta \varphi$ is very small in the majority of cases.

Magnetic deflection-range. — The range energy relation in the photographic plates can be represented, for not too low energies (protons $E > 10$ MeV, $R > 550$ μ ; π -mesons $E > 0.85$ MeV, $R > 88$ μ ; μ -mesons $E > 0.65$ MeV,

$R > 67 \mu$) by an extrapolation formula of the form (CAMERINI and LATTES):

$$(1) \quad E = aR^n \left(\frac{m}{m_p} \right)^{1-n},$$

where R is the range of the particle, m its mass and m_p the mass of the proton. With R in microns and E in MeV, $a = 0.262$ and $n = 0.575$ for Ilford C2 plates. The ranges are probably 10 % shorter for same energies in the Kodak emulsions.

The particles ending their range in the emulsion are all in the non relativistic region. Their mass can be calculated by combination of equation (1) and of the value of the momentum, it is found equal to (in electron masses)

$$(2) \quad m = \left(\frac{H\rho}{3.39 \cdot 10^3 \sqrt{a \cos \varphi}} \right)^{2/(2-n)} R^{n/(n-2)}.$$

This formula gives the mass of the particle as a function of range, radius of curvature, magnetic field and angle between the tracks and the plane of the emulsions.

For values of R below the limits quoted above, the range-energy curves are used instead of formula (1) and the equation (2), which cannot more be written explicitly, is solved by successive approximations.

The analysis of the various sources of error shows that the major contribution comes from the determination of the angle β between the tangents to the track. This depends on the conditions in which the flight in the magnetic field took place (length of the flight, scattering in the plates and in the gas). In favourable cases, the probable error on the mass of individual particles is of the order of 2 to 4 %.

This value of the error compares very favourably with the other methods of determination of the masses of single particles, with photographic plates or other techniques.

Experimental results. — When the exposures were made, we had not yet been able to test the resistance of the plates to stripping in drying conditions at low temperature, the plates were kept in air at normal pressure, and the cooling water was at 14 °C. This departure from more refined conditions increased the probability of a scattering during the flight, and probably did not hinder sufficiently the fading during the long exposure.

In the plates exposed during 12 days, one pair of sister tracks was found suitable for measurement.

This event presents the particularity that the particle crossed twice the gap between the emulsions. This allows us to obtain two independent determinations of the mass.

These values are

$$204 \pm 11 \text{ } m_e,$$

$$229 \pm 15 \text{ } m_e.$$

The charge is positive, and at the end of the range a fast electron is seen; this is an example of the disintegration of a positive μ -meson.

The plates exposed during 47 days show a rather high background, also some fading might have occurred. This renders difficult the observation of electrons.

Three pairs of sister tracks gave the following values of the masses and charges

$$204 \pm 10 \text{ } m_e \text{ positive,}$$

$$200 \pm 11 \text{ } m_e \text{ positive,}$$

$$195 \pm 11 \text{ } m_e \text{ negative.}$$

No associated electron track could be distinguished at the end of their range. These events are identified as μ -mesons.

Another pair of sister tracks gave the value

$$291 \pm 33 \text{ } m_e \text{ negative.}$$

Here, a slow electron can be seen to arise from the end of the track. The probability for a negative π -meson to give no visible disintegration at the end of its range is about 1/5. On the other hand, the value of the probable error shows that there is a probability of about 1/6 for this particle to be a μ -meson.

The slow electron is probably produced by the AUGER effect arising during the capture of the meson by a nucleus, described in references ⁽⁸⁾ and ⁽⁹⁾.

Only one pair of sister tracks attributed to a proton was measured, the value obtained for the mass is

$$1800 \pm 160 \text{ } m_e.$$

Magnetic deflection-scattering. — The methods used for the measurement of multiple scattering are fully described elsewhere ⁽¹⁰⁾. They are based on the determination of the directions of successive portions of the track. This is made possible with sufficient accuracy by the use of a special protractor fitted

⁽⁸⁾ R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. MUIRHEAD, F. C. POWELL and D. M. RITSON: *Nature*, **163**, 47, 82 (1949).

⁽⁹⁾ M. D. E. COSYNS, C. C. DILWORTH, G. OCCHIALINI, M. SCHÖNBERG and N. PAGE: *Proc. Phys. Soc.*, **62 A**, 801 (1949).

⁽¹⁰⁾ Y. GOLDSCHMIDT-CLERMONT: *Bull. Centre Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 14; *Nuovo Cimento* (in the press).

to the microscope, with which a minute of angle is easily read. This instrument is shown on figure 3.

These methods are applied to the two sister tracks, and they give the value of the kinetic energy E of the particle ⁽¹¹⁾. The precision of the measurement

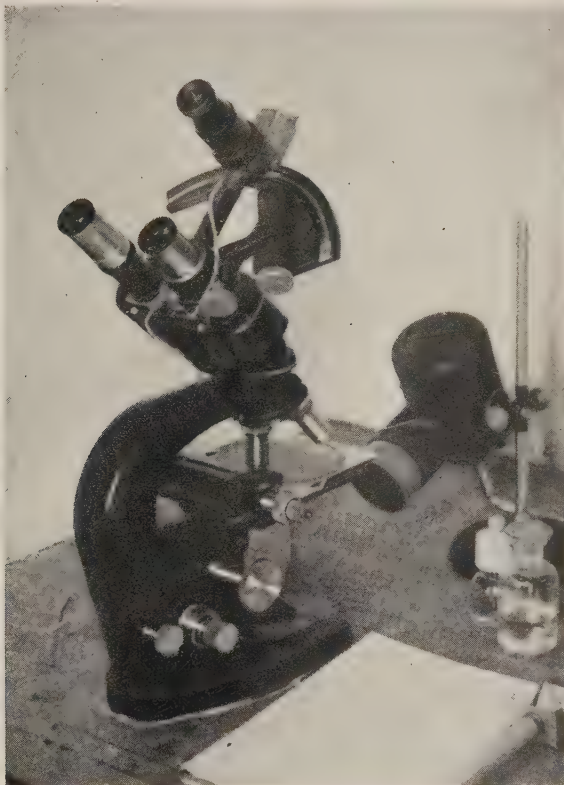


Fig. 3.

depends mainly on the length of track available, it reaches a few percent in favourable cases.

Limiting the calculation to the non relativistic region, the value of the mass is given by the equation (in electron masses)

$$m = \frac{1}{E} \left(\frac{H\rho}{3.39 \cdot 10^3 \cos \varphi} \right)^2.$$

⁽¹¹⁾ The energy E is strictly a function of the mean angle of scattering and of the mass. It is, however, very insensitive to mass, its effect is taken into account as a correction.

The precision on the mass is also affected by the precision of the determination of momentum discussed in the preceding paragraphs.

The method can be extended to the lower part of the relativistic region.

It can be shown, for instance that a 50 MeV meson could be recognized as such with a precision of the order of 20 %, with a field strength of 60 000 gauss. The range of such a particle is of the order of 40 mm, and its end is very seldom seen in the emulsions. Only a fraction of this length is necessary for a precise measurement of scattering.

As a demonstration of the possibilities of the method, two pairs of sister tracks have been measured, in the non relativistic region.

The particle of one pair does not reach the end of its range in the emulsions. The value found for its mass is $315 \pm 40 m_e$.

The track of the other pair ends in the emulsion.

The mass can be determined by the three following combinations.

Range - magnetic deflection	$195 \pm 11 m_e$,
Magnetic deflection - scattering . . .	$198 \pm 34 m_e$,
Scattering - range	$229 \pm 60 m_e$.

The information obtained by the combinations of the above parameters with the measurement of ionisation by grain counting is discussed in ref (12).

Conclusion.

This preliminary experiment confirms together with the observations of the authors quoted before, the value of the method of magnetic deflection in a sandwich of photographic plates in measurement of the mass and determination of the charge of nuclear particles.

The range of applicability of the method has been extended by the addition of the measurement of multiple scattering.

We hope to be able to obtain further exposures both at sea level and at higher altitude.

Acknowledgments.

We want to express our gratitude to Professors COSYNS, OCCHIALINI and ROSTAGNI, and the members of their laboratories for their constant interest and very valuable help during this work.

(12) G. OCCHIALINI: *Como Congress Report, Suppl. Nuovo Cimento*, 6 (1949); *Bull. Centre Phys. Nucl. Bruxelles*, n. 11-a.

We sincerely thank Miss FABBRICHESI, Miss FRANS, Mrs HUBERT, Miss MALASPINA, and Miss TITS for their assistance during the scanning of the plates.

We express our gratitude to Mr. BERRIMAN, of Kodak Ltd., who prepared the plates needed for this experiment.

We thank the SADE of Venice for its generous financial support.

We are very grateful for the warm hospitality we respectively found in the laboratories of Padova and Brussels.

RIASSUNTO

Sono stati esposti dei « sandwich » di lastre fotografiche nucleari, con le emulsioni affacciate ad una distanza di 1,5 mm, in un campo magnetico di 30 000 gauss al livello del mare. La posizione reciproca delle lastre è stata individuata da una serie di tracce puntiformi ottenute con un sottile pennello di raggi X. Sono state prese tutte le precauzioni sia nella preparazione delle lastre, che nell'esposizione, nello sviluppo e nell'asciugamento di esse, allo scopo di assicurarne la massima sensibilità ed evitare delle distorsioni nella gelatina. Il raggio di curvatura della traiettoria nel campo magnetico, durante il volo fra un'emulsione e l'altra, viene determinato dalle direzioni e posizioni relative delle tangenti nei due punti di uscita ed entrata nelle emulsioni stesse. Se la particella si arresta in una delle due emulsioni, la determinazione della sua quantità di moto può essere associata alla misura del suo percorso e così è possibile calcolarne la massa, come indicato da POWELL e ROSENBLUM. Se la particella non s'arresta nell'emulsione la determinazione della quantità di moto può essere associata ad una misura di densità di grani, nel campo di energia ove questo parametro è abbastanza sensibile, oppure con una misura di « scattering » se la traccia è abbastanza lunga per questo scopo.

Sulla componente nucleonica della radiazione cosmica alle medie energie.

P. BUDINI

Istituto di Fisica della Università di Trieste

N. DALLAPORTA

Istituto di Fisica della Università di Padova - Centro del C.N.R. per gli ioni veloci

(ricevuto il 21 Marzo 1950)

Riassunto. — Si studia lo sviluppo della componente nucleonica nell'aria partendo dall'ipotesi che essa sia generata e in parte costituita dai nucleoni primari che interagiscono coi nuclei dell'aria. Si ammette che le sezioni d'urto differenziali sia per la perdita di energia dei nucleoni urtanti che per la espulsione dei nucleoni secondari dal nucleo urtato siano del tipo di Bremsstrahlung. Si tiene conto della perdita di energia per frenamento in materia nucleare e della perdita di energia per ionizzazione per i nucleoni che si trovano nello stato di protone. Basandosi sulla probabilità che un nucleone abbia trascorso una certa parte del suo percorso come protone ovvero come neutrone si esegue la separazione tra le componenti protonica e neutronica. Si discutono i limiti di validità dei calcoli e si confrontano i risultati coi dati dell'esperienza.

1. — La tecnica delle lastre nucleari ha fornito un mezzo notevolmente sensibile per uno studio dettagliato delle componenti penetranti della radiazione cosmica, e in special modo della componente nucleonica. Sembra infatti ⁽¹⁾ che le stelle di disintegrazione che costituiscono il fenomeno più appariscente tra quelli osservati nelle lastre debbano attribuirsi quasi esclusivamente, se non proprio totalmente, a tale componente nucleonica, e ne costituiscono in tale modo il principale rivelatore. Si deve quindi ritenere assai probabile che lo studio sistematico delle stelle sia destinato a fornirci dei ragguagli sempre più completi e precisi circa l'andamento generale di detta componente, sicchè

(¹) G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 456 (1949).

fin d'ora appare giustificato il cercare di prevederne le caratteristiche in base alle nostre attuali conoscenze teoriche.

Dalle indicazioni finora raccolte, risulta che le perdite di energia subite dalla primaria nucleonica incidente nell'attraversare l'atmosfera siano dovute a due principali cause:

a) Per nucleoni energici (dell'ordine di alcuni GeV) le perdite di energia avvengono quasi esclusivamente per irraggiamento mesonico, che si verifica nell'urto tra due nucleoni con emissione di uno o più mesoni; nulla di preciso sappiamo intorno alla sezione d'urto di questo processo; in particolare se l'emissione di mesoni uscenti da un nucleo attraversato da un primario energetico sia di tipo « multiplo » o « plurimo ». Ad ogni modo sembra che tale distinzione nel processo elementare di emissione si ripercuota poco sui risultati complessivi suscettibili di confronto sperimentale, come dimostrano gli argomenti a favore dell'una o dell'altra ipotesi, di peso pressochè uguale fino ad oggi. Qualunque però sia l'esatto meccanismo di emissione, tutti ritengono molto probabile che tale sezione d'urto sia funzione soltanto del rapporto tra l'energia del o dei mesoni emessi e del nucleone incidente, sicchè la sezione totale risulta indipendente dall'energia primaria, in stretta analogia col processo di Bremsstrahlung elettromagnetico, almeno al di sopra di una certa energia dell'ordine di alcuni GeV, mentre al di sotto si ritiene che essa tenda piuttosto rapidamente a zero.

b) Per nucleoni di media e bassa energia, le perdite sono principalmente dovute a frenamento nella materia nucleare ed inoltre, quando il nucleone è un protone, a frenamento per ionizzazione; per i due tipi di frenamento si assumono leggi della medesima forma, differenti solamente per il valore assoluto della costante di frenamento.

I processi sono inoltre generalmente accompagnati dall'emissione di uno o più nucleoni di rinculo secondari veloci capaci a loro volta di dare origine alla produzione di altri nucleoni in un urto. Mentre, come abbiamo visto, si deve pensare che l'emissione di mesoni cessi per energie primarie inferiori ad alcuni GeV, si può ammettere che anche sotto tale energia vengano emessi nucleoni secondari capaci di originare stelle.

Le precedenti considerazioni pongono in luce un parallelo abbastanza marcato tra gli effetti determinanti l'andamento della componente nucleonica e quelli analoghi della componente elettronica degli sciami fotoelettronici, cosicchè può sembrare abbastanza legittimo cercare di svolgere la teoria della nucleonica sul modello di quella elettronica. È quanto è stato sostanzialmente fatto da HEITLER e JANOSSY ⁽²⁾ (citati in seguito con H. e J.) che hanno però trattato il problema limitandosi alla regione delle alte energie, corrispondenti

(2) W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 374 (1949).

alla approssimazione A di ROSSI e GREISEN ⁽³⁾ per la componente elettronica, e cioè tenendo conto soltanto della causa a) per le perdite di energia, e non distinguendo tra gli stati di protone e di neutrone per i nucleoni. Per la zona delle basse energie, molto più complicata, un calcolo sommario è stato finora eseguito da FERRETTI ⁽⁴⁾ che ha schematizzato il problema distinguendo, al di sotto della zona energetica di H. e J., una regione B approssimativamente compresa tra 200 e 600 MeV, per la quale le perdite di energia sono dovute ad urti nuc'eari non radiativi e alla ionizzazione, ma si considerano indipendenti dalla energia, e una terza regione C per energie minori di 200 MeV, per la quale le schematizzazioni precedenti non sono neanche approssimativamente valide.

Nel nostro lavoro ci proponiamo di estendere il formalismo usato da H. e J. anche alla zona delle basse energie, tenendo conto non solo di tutte le perdite per frenamento, ma anche della loro variazione in funzione dell'energia.

Per quanto riguarda invece gli scambi alternati di stato tra protone e neutrone che subisce un nucleone, abbiamo dovuto accontentarci, data la grande incertezza delle attuali teorie delle forze nucleari che renderebbero illusoria ogni soverchia precisione, di una schematizzazione sommaria, assumendo precisamente probabilità $1/2$ di scambio nell'attraversamento di un nucleo per parte di un nucleone. Discuteremo più avanti le eventuali modifiche cui darebbero luogo considerazioni più raffinate, ma riteniamo che queste non dovrebbero essere di grande entità nè alterare in maniera apprezzabile i risultati raggiunti.

In tale modo, pensiamo che la nostra trattazione nei limiti di validità su cui si basa, dovrebbe riuscire a rendere conto, in modo sufficientemente approssimato, dell'andamento della componente nucleonica fino ad energie dell'ordine di 200-300 MeV.

Al di sotto di tale limite subentrano infatti delle nuove condizioni che non solo alterano sostanzialmente la nostra impostazione, ma delle quali sembra piuttosto difficile poter tener conto in un qualsiasi modo che non implichi notevoli difficoltà di svolgimento; accenneremo più avanti a tali condizioni.

Infine cercheremo di discutere i risultati ottenuti confrontandoli con i dati sperimentali finora noti per ricavare da tale confronto alcune indicazioni sull'andamento effettivo dei processi in giuoco nella componente nucleonica.

2. - Con un elegante procedimento matematico, H. e J., hanno calcolato la probabilità $P(\theta, t)$ che un nucleone giunto a profondità θ (in g/cm²) dal limite dell'atmosfera abbia nel suo percorso attraversato uno spessore t (in diametri nucleari di aria) di materia nucleare. La conoscenza di tale probabi-

⁽³⁾ B. ROSSI e G. GREISEN: *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 240 (1941).

⁽⁴⁾ B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **6**, 379 (1949).

lità permette di ricondurre lo studio dell'effettivo svolgimento della componente nucleonica nell'atmosfera a quello che essa avrebbe in materia nucleare omogenea, quando si ammetta che tutte le perdite di energia avvengano solamente nella materia nucleare. Detta infatti $S(E, \theta)$ l'intensità verticale della componente nucleonica nell'intervallo energetico E e $E + dE$ a profondità atmosferica θ , e $S(E, t)$, l'analoga grandezza a profondità t di materia nucleare, la prima si può ricavare dalla seconda mediante la relazione:

$$(1) \quad S(E, \theta) = \int_0^{\infty} S(E, t) P(\theta, t) dt.$$

Giovandoci anche noi della (1), cominceremo quindi col determinare la $S(E, t)$ in materia nucleare omogenea tenendo conto però dei fattori elencati nel n. 1 e che erano stati trascurati da H. e J.

Indichiamo con $w(E', E' - E)$ la probabilità che un nucleone di energia E' perda nell'unità di spessore nucleare l'energia $E' - E$, sia nella creazione di mesoni che di nucleoni secondari, di modo che la sezione d'urto totale risulti:

$$(2) \quad a = \int_0^{E'} w(E', \varepsilon) d\varepsilon, \quad \varepsilon = E' - E,$$

Sia inoltre $v(E', E)$ la probabilità che un nucleone di energia E' crei nella unità di spessore nucleare nucleoni secondari di energia E . Supporremo che al di sopra di un certo limite (~ 3 GeV) tali sezioni d'urto siano del tipo Bremsstrahlung, abbiano cioè la forma:

$$w\left(\frac{E' - E}{E'}\right); \quad v\left(\frac{E}{E'}\right)$$

di modo che a risulti costante.

Sotto tale limite, le suddette sezioni d'urto decresceranno rapidamente; riservandoci di discutere più avanti il loro comportamento, ammetteremo che esse si possano scrivere nella forma:

$$(3) \quad W(E') w\left(\frac{E' - E}{E'}\right), \quad V(E') v\left(\frac{E}{E'}\right),$$

dove i fattori $W(E')$ e $V(E')$ sono funzioni che sotto 3 GeV decrescono più o meno rapidamente dal valore 1 al valore 0.

Sia inoltre $\beta(E)$ la perdita di energia per unità di lunghezza nucleare per frenamento continuo: questa grandezza dipende dall'energia secondo la legge ⁽⁵⁾

$$(4) \quad \beta(E) = \beta_0 \frac{E^2}{E^2 - M^2},$$

⁽⁵⁾ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), p. 263; G. C. J. ZWANIK KEN: *Physica*, 14, 530 (1948).

dove M è l'energia a riposo del nucleone e β_0 una costante che vale circa 30 MeV per l'aria.

Con tali notazioni, l'equazione asintotica di diffusione per alte energie studiata da H. e J. ⁽²⁾, tenuto conto di un termine aggiuntivo che rappresenta il contributo dei nucleoni secondari, è data da:

$$(5) \quad \frac{\partial S_A(E, t)}{\partial t} = -a S_A(E, t) + \\ + \int_E^\infty S_A(E', t) w \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{d(E' - E)}{E'} + \int_E^\infty S_A(E', t) v \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'}.$$

Tale equazione è stata risolta da H. e J. mediante l'uso della trasformata di MELLIN:

$$M_s(t) = \int_0^\infty E^{s-1} S(E, t) dE,$$

con la condizione iniziale di uno spettro di potenza nucleonico al limite superiore dell'atmosfera rappresentato dalla legge:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{I \gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} & \text{per } E > E_0, \\ 0 & \text{per } E < E_0, \end{cases}$$

dove I rappresenta il numero totale di particelle che arrivano al limite dell'atmosfera su 1 cm² nell'unità di tempo e nell'unità d'angolo solido.

Il valore della costante E_0 risulta alle nostre latitudini di circa 3 GeV. Ora possiamo facilmente calcolare le espressioni per le trasformate di LAPLACE della $S_A(E, t)$.

Posto:

$$N(s, \lambda) = \int_0^\infty \exp[-\lambda t] M_s(t) dt$$

si trova, usando l'espressione per $M_s(t)$ data da H. e J.

$$L_{S_A}(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} E^{-s} N(s, \lambda) ds = \frac{1}{2\pi i E} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-1} \frac{\gamma}{\gamma + 1 - s} \frac{ds}{\lambda + a - w_s - v_s},$$

dove:

$$(7) \quad w_s = \int_0^1 (1-z)^{s-1} w(z) dz \quad \text{e} \quad v_s = \int_0^1 y^{s-1} v(y) dy.$$

Questa integrata intorno al polo $s = \gamma + 1$ dà per $E > E_0$

$$(8) \quad L_{SA}^1(E, \lambda) = \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^\gamma \frac{\gamma}{\lambda + a - w_{\gamma+1} - v_{\gamma+1}}$$

e integrata intorno al polo $\lambda = -a + w_s + v_s$ dà per $E < E_0$

$$(8a) \quad L_{SA}^2(E, \lambda) = \frac{1}{E} \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-1} \frac{\gamma}{\gamma + 1 - s(\lambda)} s'(\lambda).$$

3. - Con queste premesse cercheremo di integrare le equazioni complete di diffusione, in cui si tiene conto dei termini di frenamento che risultano:

per $E > E_0$

$$(9) \quad \frac{\partial S(E, t)}{\partial t} = -a S(E, t) + \\ + \int_E^\infty S(E', t) w \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \int_E^\infty S(E', t) v \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \frac{\partial}{\partial E} [\beta S(E, t)];$$

per $E < E_0$

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{S}(E, t)}{\partial t} = -W(E) a \bar{S}(E, t) + \\ + \int_E^{E_0} \bar{S}(E', t) W(E') w \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \int_{E_0}^\infty S(E', t) w \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \\ + \int_E^{E_0} \bar{S}(E', t) V(E') v \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \int_{E_0}^\infty S(E', t) v \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \frac{\partial}{\partial E} [\beta \bar{S}(E, t)].$$

Evidentemente nel caso della (9) il termine correttivo in β è assai piccolo ed è stato introdotto solamente per questioni di continuità. Questa equazione si può integrare usando la trasformata di LAPLACE. Posto:

$$L_S(E, \lambda) = \int_0^\infty \exp[-\lambda t] S(E, t) dt,$$

si ottiene

$$(9a) \quad \lambda L_S(E, \lambda) - S(E, 0) = -a L_S(E, \lambda) + \\ + L_S(E, \lambda) \int_E^\infty \frac{L_S(E', \lambda)}{L_S(E, \lambda)} w \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \\ + L_S(E, \lambda) \int_E^\infty \frac{L_S(E', \lambda)}{L_S(E, \lambda)} v \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'} + \frac{\partial}{\partial E} [\beta L_S(E, \lambda)].$$

Si possono senza grande errore sostituire i rapporti che compaiono sotto il segno di integrale coi valori asintotici che si ricavano dalla (8). Gli integrali si riconducono allora alle (7) e l'equazione diventa, dopo avere riordinato i termini:

$$\beta \frac{\partial L_S(E, \lambda)}{\partial E} - \left[\lambda + a - w_{\gamma+1} - v_{\gamma+1} - \frac{\partial \beta}{\partial E} \right] L_S(E, \lambda) + S(E, 0) = 0,$$

la cui soluzione, tenuto conto della (4) e posto:

$$(9b) \quad \lambda_0 = -a + w_{\gamma+1} + v_{\gamma+1},$$

è data da:

$$\begin{aligned} L_S(E, \lambda) = & \frac{1}{\beta(E)} \exp \left[-\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right] \times \\ & \times \int_{\bar{E}}^{\bar{E}} S(E, 0) \exp \left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right] dE + \\ & + L_0 \frac{\beta(\bar{E})}{\beta(E)} \exp \left[-\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right], \end{aligned}$$

dove le costanti \bar{E} e L_0 vanno scelte in modo che per E grande la $L_S(E, \lambda)$ tenda al valore asintotico $L_{S_A}(E, \lambda)$. Si trova così:

$$L_0 = L_{S_A}(\bar{E}, \lambda),$$

Integrando ripetutamente per parti, posto:

$$\psi(E, \lambda) = S(E, 0) \exp \left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right],$$

si trova

$$\begin{aligned} L_S(E, \lambda) = & \frac{\beta_0}{\beta(E)} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \exp \left[-\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right] \times \\ & \times \left\{ - \left[\psi(\bar{E}) + \frac{\beta_0}{\lambda - \lambda_0} \left[\frac{\partial \psi}{\partial E} \right]_{E=\bar{E}} + \frac{\beta_0^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2} \right]_{E=\bar{E}} + \dots \right] \right\} + \\ & + \exp \left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} (\bar{E} - E) \right] \left[\psi(E) + \frac{\beta_0}{\lambda - \lambda_0} \frac{\partial \psi}{\partial E} + \frac{\beta_0^2}{(\lambda - \lambda_0)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2} + \dots \right] \\ & + \bar{L}_S(\bar{E}, \lambda) \frac{\beta(\bar{E})}{\beta(E)} \exp \left[-\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \left(\bar{E} - E + \frac{M^2}{\bar{E}} - \frac{M^2}{E} \right) \right]. \end{aligned}$$

Tenendo conto dell'identità:

$$\int_0^\infty F(E + \varepsilon x) \exp[-\mu x] dx = \frac{1}{\mu} \left[F(E) + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{\partial F}{\partial E} + \frac{\varepsilon^2}{\mu^2} \frac{\partial^2 F}{\partial E^2} + \dots \right]$$

e prendendo per la costante \bar{E} un valore molto grande che renda trascurabili gli esponenziali che la contengono, si ottiene:

$$L_S(E, \lambda) = \frac{\beta_0}{\beta(E)} \exp \left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \frac{M^2}{E} \right] \int_0^\infty S(E + \beta_0 x, 0) \times \\ \times \exp \left[- \frac{\lambda - \lambda_0}{\beta_0} \frac{M^2}{E + \beta_0 x} - (\lambda - \lambda_0) x \right] dx$$

e sviluppando nell'esponenziale sotto integrale il fattore $1 / \left(1 + \frac{\beta_0}{E} x \right)$ in serie si ottiene facilmente:

$$(11) \quad L_S(E, \lambda) = \frac{I_\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{1}{\lambda - \lambda_0} G \left[\frac{(\lambda - \lambda_0) E}{\beta} \right],$$

dove

$$G(x) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{x+z} \right)^{\gamma+1} \exp[-z] dz:$$

la (10) si può antitrasformare (vedi appendice); si ottiene

$$(11') \quad S(E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp[\lambda t] L_S(E, \lambda) d\lambda = \frac{I_\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{\exp[\lambda_0 t]}{\left(1 + \frac{\beta}{E} t \right)^{\gamma+1}}.$$

Per passare dalla materia nucleare a quella ordinaria, basta applicare la (1); si trova, usando per la $P(\theta, t)$ e per la sua trasformata di LAPLACE, le espressioni date da H. e J. (vedi appendice):

$$(12) \quad S(E, \theta) = \frac{I_\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^\infty \exp \left[-x - \theta n \Phi_A f \left(-\lambda_0 + \frac{\beta}{E} x \right) \right] x dx,$$

dove n è il numero di nuclei per cm^3 , e Φ_A la sezione d'urto del nucleo medio di aria e

$$f(x) = 1 - 2 \frac{1 - (1+x) \exp[-x]}{x^2}.$$

Essendo $\beta/E \ll 1$ sarà lecito prendere per la f :

$$f \left(-\lambda_0 + \frac{\beta}{E} x \right) = f(-\lambda_0) + \frac{\beta}{E} x f'(-\lambda_0),$$

l'integrazione si può allora eseguire facilmente e si ottiene

$$(13) \quad S(E, \theta) = \frac{I_\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{\exp[-\theta n \Phi_A f(-\lambda_0)]}{\left[1 + \theta n \Phi_A f'(-\lambda_0) \frac{\beta}{E} \right]^{\gamma+1}}.$$

Un procedimento del tutto analogo anche se formalmente più complicato viene seguito per integrare la (10) usando la (8a) anzichè la (8) per sostituire i rapporti di trasformate di LAPLACE che compaiono nella analoga alla (9a). Crediamo inutile riportare per esteso i calcoli accontentandoci di dare i risultati. Per la trasformata si ottiene:

$$(14) \quad L_{\bar{S}}(E, \lambda) = \frac{I_{\gamma} E_0^{\gamma} \bar{J}(E, \lambda) + \bar{j}(E, \lambda)}{\bar{E}^{\gamma+1}} \frac{G\left[(\lambda - l_0) \frac{E}{\beta}\right]}{\gamma - l_0} +$$

$$+ \frac{\gamma}{E_0} \frac{G\left[(\lambda - \lambda_0) \frac{E_0}{\beta(E_0)}\right]}{\lambda - \lambda_0} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{w_{\gamma+1} + v_{\gamma+1}}{\lambda - l_0} G\left[(\lambda - l_0) \frac{E_0}{\beta(E_0)}\right] \right\} \exp [-(\lambda - l_0) U(E)],$$

$$\text{dove } U(E) = \frac{1}{\beta_0} \left(E_0 - E + \frac{M^2}{E_0} - \frac{M^2}{E} \right).$$

Il secondo termine è un termine di raccordo che assicura la continuità tra la zona delle alte e quella delle basse energie e che ha importanza solo intorno al valore $E = E_0$.

In queste espressioni

$$(14\text{-bis}) \quad l_0 = -\bar{w}a + \bar{D} + \bar{d},$$

e \bar{J} , \bar{j} , \bar{W} , \bar{D} , \bar{d} sono opportuni valori medi delle seguenti espressioni:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} D(E, s) &= \int_{\frac{E}{E_0}}^1 W\left(\frac{E}{z}\right) w(1-z) z^{(s-1)} dz, \\ d(E, s) &= \int_{\frac{E}{E_0}}^1 V\left(\frac{E}{z}\right) v(z) z^{(s-1)} dz, \\ J(E, \lambda) &= \int_0^{\frac{E}{E_0}} G\left[\frac{(\lambda - \lambda_0) \left(1 - \frac{M^2}{E^2} z^2\right) E}{\beta_0 z}\right] w(1-z) z^{\gamma} dz \\ j(E, \lambda) &= \int_0^{\frac{E}{E_0}} G\left[\frac{(\lambda - \lambda_0) \left(1 - \frac{M^2}{E^2} z^2\right) E}{\beta_0 z}\right] v(z) z^{\gamma} dz, \end{aligned} \right.$$

definiti dalle relazioni

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_E^{E_0} \frac{[aW(E') - D(E', s) - d(E', s)]}{\beta(E')} dE' = [a\bar{W}(\bar{E}) - \bar{D}(\bar{E}, s) - \bar{d}(\bar{E}, s)] \int_E^{E_0} \frac{dE'}{\beta(E')} \\ & \int_E^{E_0} \frac{J(E', \lambda) + j(E', \lambda)}{E'^{(\gamma+1)}} \exp \left[-\frac{(\lambda - l_0)(E' - E)}{\beta_0} \right] dE' = \\ & \quad = [\bar{J}(\bar{E}, \lambda) + \bar{j}(\bar{E}, \lambda)] \int_E^\infty \frac{\exp \left[-\frac{\lambda - l_0}{\beta_0} E' \right]}{E'^{(\gamma+1)}} dE' . \end{aligned} \right.$$

Antitrasformando la (14) e passando in materia ordinaria, si ottiene in definitiva (vedi appendice):

$$(17) \quad \bar{S}(E, \theta) = \frac{I_Y E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{Y}{l_0 - \lambda_0} \left[H \left(\theta, l_0, \frac{\beta}{E} \right) - H \left(\theta, \lambda_0, \frac{\beta_0}{E_0} \right) \right] \times \\ \times \left[1 + \frac{\beta(\gamma+1) \left(1 - \frac{\beta_0 E}{\beta E_0} \right)}{E(l_0 - \lambda_0) \left(1 + \theta n \Phi_{Af}'(-l_0) \frac{\beta}{E} \right)} \right] + \\ + \frac{I_Y}{E_0} \exp[l_0 U] \left[H \left(\theta, \lambda_0, \frac{\beta_0}{E_0} \right) (1 - \lambda_0 U) \right] - \frac{I}{l_0 - \lambda_0} \frac{\gamma}{E_0} \exp[l_0 U] \times \\ \times \left\{ (w_{\gamma+1} + v_{\gamma+1}) \left[H \left(\theta, l_0, \frac{\beta}{E} \right) (1 - l_0 U) - H \left(\theta, \lambda_0, \frac{\beta_0}{E_0} \right) (1 - \lambda_0 U) \right] \right\} ,$$

col seguente significato dei simboli:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & H(\theta, x, y) = \frac{\exp[-\theta n \Phi_{Af}(-x)]}{[1 + \theta n \Phi_{Af}'(-x)y]^{r+1}} , \\ & Y = \int_0^{\frac{\bar{E}}{E_0}} [w(1-z) + v(z)] z^\gamma dz . \end{aligned} \right.$$

Il secondo e terzo termine della (17) sono di raccordo: si vede facilmente che per $E \rightarrow E_0$ si ha $U \rightarrow 0$ e che il terzo annulla il primo e che allora il secondo diventa identico alla (13) per $E = E_0$.

4. - Le soluzioni (13) e (17) sono state ottenute tenendo solamente conto delle perdite di energia in materia nucleare, e sarebbero quindi valide sol-

tanto nel caso in cui non ve ne fossero altre. Sappiamo invece che ogni nucleone, per tutto il tempo in cui viaggia in stato di protone, subisce un frenamento per ionizzazione, la cui entità, indicando con $\alpha(E)$ la perdita di energia per unità di lunghezza in materia ordinaria, è data dalla legge:

$$(19) \quad \alpha(E) = \alpha_0 \frac{E^2}{E^2 - M^2},$$

dove $\alpha_0 \cong 1,8 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$ (per l'aria).

Occorrerà quindi modificare i nostri precedenti risultati per tenere conto di questo nuovo effetto, e ciò non per tutti i nucleoni, ma solo per quelli che si trovano in stato di protone.

Ora, l'identità di forma delle due leggi di frenamento, (3) e (19), ha come conseguenza che la perdita totale di energia di frenamento su un dato percorso sarà la stessa scambiando tra loro l'ordine di successione dei percorsi in materia nucleare e in materia ordinaria. (Alle energie per cui tali perdite diventano importanti, le altre cause di perdita di energia di tipo Bremsstrahlung sono praticamente trascurabili). Per un dato nucleone che dopo avere attraversato la profondità θ arrivi con energia E , tutto avverrà come se avesse attraversato inizialmente uno strato continuo di materia nucleare equivalente al percorso da esso effettivamente compiuto nei nuclei successivamente incontrati, per poi propagarsi per il resto del percorso in uno spazio privo di nuclei e nel quale avvengono solo le perdite per ionizzazione. Il fatto che sia nella (13) che nella (17), la dipendenza dalla profondità avvenga sempre tramite il prodotto $p = \theta n \Phi_A$ e mai tramite la θ sola, mostra che la forma delle $S(E, \theta)$ e $\bar{S}(E, \theta)$, sarà la stessa sia che si considerino i nuclei sparsi nell'atmosfera (θ grande, n piccolo) o che si considerino concentrati in uno strato sottile (θ piccolo, n grande). Sostituendo temporaneamente il prodotto $\theta n \Phi_A$ colla lettera p potremo quindi considerare le $S(E, p)$ e $\bar{S}(E, p)$ come le distribuzioni della componente nucleonica all'uscita dallo strato nucleare equivalente e quindi come condizioni iniziali per la successiva propagazione nell'atmosfera priva di nuclei.

Se ora supponiamo che in quest'ultima la componente considerata abbia viaggiato per uno spessore θ' come protone, il suo spettro a profondità θ' sarà dato da

$$(20) \quad \frac{\partial \Sigma(E, \theta')}{\partial \theta'} = \frac{\partial \alpha \Sigma(E, \theta')}{\partial E},$$

che dovrà venire integrata colla condizione iniziale

$$(21) \quad \Sigma(E, 0) = \begin{cases} S(E, p) & \text{per } E > E_0, \\ \bar{S}(E, p) & \text{per } E < E_0. \end{cases}$$

Indicando ora con $\Pi^P(\theta, \theta') d\theta'$ la probabilità che su uno spessore totale θ la distanza percorsa in stato di protone sia compresa tra θ' e $\theta' + d\theta'$, avremo per la componente nucleonica totale a profondità θ :

$$\Sigma(E, \theta) = \int_0^\infty \Sigma(E, \theta') \Pi^P(\theta, \theta') d\theta'.$$

Indicando invece rispettivamente con $\Pi_P^P(\theta, \theta') d\theta'$ e $\Pi_N^P(\theta, \theta') d\theta'$ le probabilità che su un percorso totale θ la componente percorra un tratto compreso tra θ' , $\theta' + d\theta'$ come protone, ed appaia nell'ultimo tratto del percorso come protone o rispettivamente come neutrone, avremo, per lo spettro protonico e rispettivamente neutronico, le espressioni:

$$(22) \quad \Sigma_P(E, \theta) = \int_0^\theta \Sigma(E, \theta') \Pi_P^P(\theta, \theta') d\theta', \quad \Sigma_N(E, \theta) = \int_0^\theta \Sigma(E, \theta') \Pi_N^P(\theta, \theta') d\theta'.$$

L'integrale generale della (20) si ottiene immediatamente: esso è della forma

$$\Sigma(E, \theta') = \frac{1}{\alpha(E)} F \left[\theta' + \int \frac{dE}{\alpha(E)} \right],$$

dove la funzione F arbitraria viene determinata dalla condizione iniziale (21). Tenendo conto della (19) si ottiene:

$$(23) \quad \Sigma(E, \theta') = \frac{\alpha[\varepsilon(\theta')]}{\alpha(E)} \Sigma[\varepsilon(\theta'), 0],$$

dove

$$\varepsilon(\theta') = \frac{E}{2} \left[\left(1 + \frac{M^2}{E^2} + \frac{\alpha_0}{E} \theta' \right) + \sqrt{\left(1 + \frac{M^2}{E^2} + \frac{\alpha_0}{E} \theta' \right)^2 - \frac{4M^2}{E^2}} \right].$$

Le probabilità $\Pi(\theta, \theta')$ si possono calcolare nel modo seguente: detti $k + l$ il numero totale effettivo di urti con nuclei subiti da un nucleone nell'attraversare lo spessore θ di aria, la probabilità che k di questi lo lascino in stato di protone e l di questi in stato di neutrone è evidentemente data da:

$$(24) \quad \frac{(k + l)!}{k! l!} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+l}.$$

Detti p e p' il numero medio di urti subiti da un nucleone percorrendo

rispettivamente le distanze θ e θ' e legati a queste dalle relazioni:

$$p = \theta n \Phi_A \quad p' = \theta' n \Phi_A,$$

le probabilità che su un percorso medio θ' in stato di protone il numero effettivo di tratti percorsi in tale stato sia k e rispettivamente che su un percorso medio di $\theta - \theta'$ in stato di neutrone il numero effettivo di tratti percorsi in tale stato sia l , saranno rispettivamente:

$$\exp[-p'] \frac{p'^k}{k!} \quad \text{e} \quad \exp[-(p-p')] \frac{(p-p')^l}{l!}.$$

La probabilità $\Pi(\theta, \theta')$ che un nucleone generico percorra il tratto θ' come protone e $\theta - \theta'$ come neutrone sarà infine:

$$(25) \quad \Pi(\theta, \theta') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k! l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} \frac{\exp[-p'](p')^k}{k!} \frac{\exp[-(p-p')](p-p')^l}{l!}.$$

Nello scrivere la (24) è stato implicitamente assunto che le probabilità per un nucleone di emergere come protone o come neutrone sono ambedue uguali ad $1/2$, il che non è certo esatto. Sembra infatti anzitutto che una parte delle forze nucleari sia di tipo ordinario e non di scambio, il che tende ad aumentare la probabilità che un nucleone permanga nel suo stato anzichè cambiarlo. Ma anche ammettendo che vi sia scambio di carica in ogni urto nucleone-nucleone, il che si verificherebbe più o meno in una teoria di produzione « plurima » dei mesoni con forze di scambio, è facile vedere che le probabilità di permanenza nel proprio stato e di scambio di stato dopo l'attraversamento di uno spessore t di materia nucleare sono date rispettivamente da:

$$\frac{1}{2} (1 + \exp[-N\psi t]) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} (1 - \exp[-N\psi t]),$$

dove N è il numero di nucleoni per unità di volume e ψ la sezione d'urto nucleone-nucleone; il che mediando sopra un percorso nucleare medio in ogni urto con un nucleo conduce a probabilità diverse per i due processi. In complesso quindi si può dire che una teoria più rigorosa dovrebbe distinguere tra probabilità di permanenza e probabilità di scambio per lo stato di ogni nucleone, il che però avrebbe come effetto di complicare notevolmente l'espressione della probabilità (24).

Osservando però che l'introdurre le nuove probabilità elementari corrette non altererebbe la simmetria della (24) tra protone e neutrone e che in complesso tutto avverrebbe (dato il maggiore valore della probabilità di permanenza nel proprio stato rispetto a quella di scambio) come se il percorso medio tra due alternanze di stato fosse alquanto allungato; riteniamo, dato il numero

medio abbastanza notevole di urti nell'attraversare l'atmosfera, che tale correzione non altererebbe sensibilmente l'andamento del fenomeno, e che quindi allo stato attuale della teoria, è sufficientemente giustificato assumere il valore $1/2$ per le due probabilità, almeno fino a che le energie non diventano troppo basse. Le probabilità che l'ultima delle $k + l$ alternanze dia sicuramente un protone e rispettivamente un neutrone sono ovviamente

$$\frac{k}{k+l}, \quad \text{risp.} \quad \frac{l}{k+l}.$$

Porremo allora:

$$(26) \quad \begin{cases} \Pi_P(\theta, \theta') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k}{k+l} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} \frac{\exp[-p']p'^k \exp[-(p-p')](p-p')^l}{k!l!} \\ \Pi_N(\theta, \theta') = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{k+l} \frac{(k+l)!}{k!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l} \frac{\exp[-p']p'^k \exp[-(p-p')](p-p')^l}{k!l!} \end{cases}$$

Le sommatorie delle (23) e (24) si possono calcolare esattamente (vedi appendice) e si ottiene:

$$(27) \quad \begin{cases} \Pi(\theta, \theta') = \exp[-2p]J_0[2i\sqrt{p'(p-p')}], \\ \Pi_P(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}(p+p')\right] p' \int_0^1 \exp\left[\frac{1}{2}\lambda p'\right] J_0[i\sqrt{\lambda p'(p-p')}] d\lambda, \\ \Pi_N(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}(p-p')\right] (p-p') \int_0^1 \exp\left[-\frac{1}{2}\lambda p'\right] J_0[i\sqrt{\lambda p'(p-p')}] d\lambda. \end{cases}$$

Una ulteriore correzione è data dal fatto che lo spettro incidente della primaria (6) è costituito esclusivamente da protoni, e che quindi nel calcolo delle $\Pi(\theta, \theta')$ occorre tenere conto che nel primo tratto la probabilità dello stato di protone è uno e quella dello stato di neutrone 0. Ciò porta per le (27) alle seguenti modifiche:

$$(28) \quad \begin{cases} \Pi^P(\theta, \theta') = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l-1} \frac{\exp[-p']p'^k \exp[-(p-p')](p-p')^l}{k!l!}, \\ \Pi_P^P(\theta, \theta') = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k-1}{k+l-1} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l-1} \frac{\exp[-p']p'^k \exp[-(p-p')](p-p')^l}{k!l!}, \\ \Pi_N^P(\theta, \theta') = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{k+l-1} \frac{(k+l-1)!}{(k-1)!l!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+l-1} \frac{\exp[-p'](p')^k \exp[-(p-p')](p-p')^l}{k!l!}. \end{cases}$$

Queste espressioni sommate, danno in definitiva:

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi^P(\theta, \theta') &= 2\Pi_P(\theta, \theta'), \\ \Pi_P^P(\theta, \theta') &= \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} (p + p') \right] p'^2 \times \\ &\quad \times \int_0^1 (1 - \lambda) \exp \left[\frac{1}{2} \lambda p' \right] J_0[i \sqrt{\lambda p' (p - p')}] d\lambda, \\ \Pi_N^P(\theta, \theta') &= \Pi^P(\theta, \theta') - \Pi_P^P(\theta, \theta') = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{1}{2} (p + p') \right] p' \times \\ &\quad \times \int_0^1 (2 - p' + \lambda p') \exp \left[\frac{1}{2} \lambda p' \right] J_0[i \sqrt{\lambda p' (p - p')}] d\lambda, \end{aligned} \right.$$

che sono le espressioni che adopreremo.

5. - L'insieme delle formule (13), (17), (21), (22), (23) e (29), ci mette in grado di calcolare l'andamento generale della componente nucleonica e di discuterlo in funzione della profondità θ e dell'energia.

Possiamo anzitutto osservare dall'esame delle (22) e (23) che, tanto per la componente protonica quanto per quella neutronica, la differenza tra i due integrali (22), che si possono valutare numericamente in modo esatto e che condizionano la separazione delle due componenti della nucleonica, risulta, come era da attenderselo data la loro forma ed il significato dei fattori che contengono, scarsamente dipendenti sia da θ che da E . Il crescere del denominatore della (23) col crescere di θ ha per conseguenza di spostare la simmetria tra le due componenti protonica e neutronica a favore di quest'ultima, il rapporto tra il numero di neutroni e quello di protoni compresi in una data banda energetica andando lievemente aumentando col diminuire dell'energia, fino ad un valore asintotico di poco superiore a 1,5 già raggiunto intorno ai 200 MeV. Questa eccedenza piuttosto scarsa di neutroni che la teoria prevede sembra sufficientemente in accordo coi dati sperimentali ricavati dalle stelle di disintegrazione per le medie energie, mentre risulta, malgrado le divergenze dei diversi autori, insufficiente per le bassissime energie. Abbiamo già fin dall'inizio accennato alla inadeguatezza delle nostre ipotesi per rendere conto dell'andamento della nucleonica per energie inferiori ai 200 MeV e ritorneremo brevemente su tale argomento più avanti.

L'andamento generale della componente nucleonica è quindi essenzialmente regolato dal fattore

$$\frac{I\gamma E_0}{E^{\gamma+1}} \frac{Y}{l_0 - \lambda_0} \left[H \left(\theta, l_0 \frac{\beta}{E} \right) - H \left(\theta, \lambda_0, \frac{\beta_0}{E_0} \right) \right].$$

Esso dipende, come appare dalle (13) e (17), da diversi parametri che ci sono più o meno incogniti, date le nostre scarse conoscenze sui fenomeni di interazione mesonica tra nucleoni veloci. Ci dovremo quindi limitare ad una discussione fenomenologica, coll'intento di ricavare mediante il confronto coi dati sperimentali noti, alcune indicazioni sui processi in questione.

La dipendenza dalla profondità θ è essenzialmente data dai fattori

$$H\left(\theta, l_0, \frac{\beta}{E}\right) \text{ e } H\left(\theta, \lambda_0, \frac{\beta_0}{E_0}\right),$$

ed è quindi condizionata dai valori di λ_0 e l_0 , i quali tramite le (9b) e (14-bis) sono legati alle sezioni d'urto dei processi di frenamento radiativo che abbiamo introdotte. Seguendo il criterio adottato anche da H. e J. conviene determinare λ_0 e l_0 dal confronto coi dati sperimentali, e da questi risalire per induzione ad ipotesi plausibili sulle sezioni d'urto.

Il valore di λ_0 condiziona l'andamento asintotico per le alte energie della componente nucleonica, e può quindi essere ricavato dallo spessore di assorbimento della componente generatrice degli sciami penetranti, come è stato fatto da H. e J. Abbiamo assunto per tale spessore di assorbimento il valore di 115 g/cm² a cui corrisponde un valore $-\lambda_0 = 0,9$, poichè il valore di 100 g/cm² assunto da H. e J. risulta al lume dei dati attuali un po' in difetto. Lo spessore di assorbimento per basse energie dovrà invece coincidere con quello della componente generatrice delle stelle di evaporazione, che risulta di 137 g/cm² (1); questo ci suggerisce di considerare tale assorbimento come condizionato dal termine

$$H\left(\theta, l_0, \frac{\beta}{E}\right)$$

della (17), e quindi di porre corrispondentemente $-l_0 = 0,7$. A profondità atmosferiche sufficienti, il decremento anche in questo caso risulta esponenziale, data la differenza dei due esponenti λ_0 e l_0 , mentre in alta quota, per $E < E_0$ e per il fatto che per $\theta \rightarrow 0$ la $\bar{S}(E, \theta)$ tende pure a zero, vi dovrà essere un massimo. La posizione di tale massimo si determina facilmente annullando la derivata dell'espressione

$$\exp[-\theta n \Phi_A f(-l_0)] - \exp[-\theta n \Phi_A f(-\lambda_0)]$$

e con i valori di λ_0 e l_0 da noi ottenuti risulta

$$\theta_{max} = 127 \text{ g/cm}^2.$$

È tuttavia da osservare che per un eventuale confronto sperimentale sarà opportuno prendere in considerazione l'intensità integrata anzichè quella verticale; la dipendenza dall'altezza di quest'ultima si ottiene operando la trasfor-

mazione di GROSS sulla espressione precedente che diviene:

$$\exp [\theta n \Phi_A f(-l_0)] - \exp [-\theta n \Phi_A f(-\lambda_0)] + \\ + \theta \{ n \Phi_A f(-l_0) E i[-\theta n \Phi_A f(-l_0)] - n \Phi_A f(-\lambda_0) E i[-\theta n \Phi_A f(-\lambda_0)] \},$$

che, nel nostro caso presenta un massimo per $\theta \cong 65$ g/cm².

Tra le due zone di alte e basse energie con andamento esponenziale ma con esponenti diversi, vi dovrà essere una zona di raccordo intermedia. Questo deriva essenzialmente dal fatto che i coefficienti $W(E)$ e $V(E)$ che compaiono nelle espressioni delle sezioni d'urto per $E < E_0$, decrescono più o meno rapidamente per tendere a zero. Abbiamo ammesso che la loro decrescenza sia lineare al di sotto di E_0 e che essi si annullino per un valore E_x dell'energia determinato dalla condizione:

$$\int_{E_x}^{E_0} \frac{a W(E') - D(E', s) - d(E', s)}{\beta(E')} dE' = -l_0 \int_{E_x}^{E_0} \frac{dE'}{\beta(E')},$$

che serve a determinare il valore medio l_0 . Adottando le ipotesi di cui diremo ora per le sezioni d'urto che compaiono nell'integrale del primo membro si ottiene

$$E_x \cong 2,3 \text{ GeV},$$

valore che sembra abbastanza ragionevole.

La dipendenza dall'energia della componente nucleonica è invece legata alla forma delle sezioni d'urto $w(z)$ e $v(z)$. L'ipotesi più semplice già adottata da H. e J. consiste nello scegliere:

$$(30) \quad w(z) = A_1(1-z)^{B_1} \quad v(z) = A_2(1-z)^{B_2},$$

dove A_1 , A_2 , B_1 e B_2 sono costanti da determinarsi.

Per determinare le costanti, ci possiamo valere delle due relazioni:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \int_0^1 w(z) dz = \frac{A_1}{B_1 + 1} \cong 3,5, \\ -\lambda_0 = \int_0^1 [w(z) - (1-z)^r w(z) - z^r v(z)] dz = 0,9 \end{array} \right.$$

la prima delle quali uguaglia il valore della sezione d'urto totale a quello geometrico [cfr. H. e J. (2)] e la seconda alla costante $-\lambda_0$, fa corrispondere lo spessore di assorbimento per alte energie. Le costanti, inoltre, dovranno esser tali che la perdita di energia per creazione di nucleoni secondari sia, in ogni urto, minore di quella totale; e che la sezione d'urto totale per la crea-

zione di nucleoni secondari sia minore o uguale di quella geometrica. Queste due condizioni, come si vede facilmente, si esprimono con le disuguaglianze:

$$(32) \quad \int_0^1 v(z) dz = \frac{A_2}{B_2 + 1} < 3,5, \quad A_1 \int_0^1 (1-z)^{B_1} dz > A_2 \int_0^1 (1-z)^{B_2} dz.$$

In tale modo due delle costanti risultano determinate entro i limiti fissati dalla (32) in funzione delle altre due. La tabella I qui annessa dà alcuni valori di A_1 e A_2 in funzione di B_1 e B_2 , e così pure quelli del valore medio del fattore Y che compare nella (17).

TABELLA I.

B_1	B_2	A_1	A_2	Y
1,2	2	7,7	10	$\sim 1,5$
2	2	10,5	5,4	$\sim 0,5$
1,5	1	8,7	3,7	$< 0,8$
2	1	5,2	2,4	$< 0,3$

Si vede facilmente che i grandi valori dell'esponente B_2 favoriscono la creazione di nucleoni secondari di bassa energia, mentre i piccoli B_1 favoriscono le grosse perdite di energia da parte del primario, una parte notevole della quale andrà comunicata ai nucleoni secondari. Per avere l'alto numero di nucleoni di bassa energia che le ricerche sperimentali vanno rivelando sarà quindi necessario fare (entro ragionevoli limiti) B_1 piccolo e B_2 grande compatibilmente con le (32). A conferma di queste considerazioni piccoli B_1 e grandi B_2 tendono ad aumentare il valore di Y che compare a fattore moltiplicativo nella (17).

Sembra quindi che, contrariamente alle conclusioni di H. e J., i quali in base ai soli dati relativi alle alte energie propendevano per un esponente B intorno a 2, il considerare il contributo dei nucleoni secondari per le basse energie debba condurre a scegliere un valore dell'esponente B_1 intorno a 1.

Per il calcolo numerico abbiamo posto $B_1 = 1,2$ e $B_2 = 2$, $I = 0,12$ ricavato dalle recenti osservazioni al limite dell'atmosfera ⁽⁶⁾, e $\gamma = 1,5$. La transizione tra lo spettro di alta energia (13) e quello di bassa energia (17) è stata calcolata in modo approssimato tenendo conto dei termini di raccordo che

(6) A. V. GAUGES, J. F. JENKINS jr. e J. A. VON ALLEN: *Phys. Rev.*, **75**, 57 (1949).

compaiono nelle espressioni (17). La zona in cui avviene tale raccordo si estende praticamente tra 2,2 GeV e E_0 .

Le curve della fig. 1 rappresentano, al livello del mare ($\theta = 1000$), l'andamento rispettivo della componente nucleonica totale (curva «t») e delle due componenti neutronica (curva «n») e protonica (curva «p») come risultano dalle formule (22). La curva tratteggiata (curva «a») rappresenta il prolungamento alle basse energie della formula (11) di H. e J. corretta per le perdite di ionizzazione. Il rapporto tra le ordinate delle curve «t» e «a» è circa 10 per le basse energie, il che concorda con le osservazioni di BERNARDINI e coll. ⁽¹⁾ in base ai dati sulle stelle di disintegrazione delle lastre; il massimo

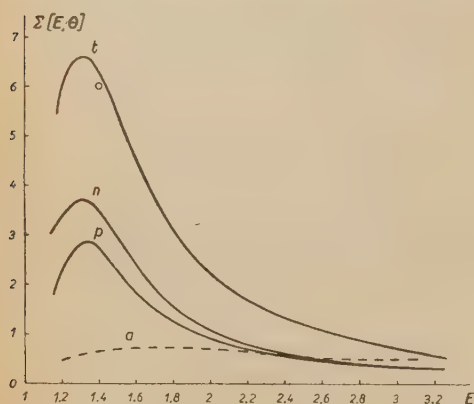


Fig. 1. - Spettri differenziali: t = nucleonico totale; n = neutronico; p = protonico; a = nucleonico prolungamento della (11). - E (energia totale) in GeV; Σ in $\text{cm}^{-1} \text{s}^{-1} \text{sterad}^{-1} \text{GeV}^{-1}$.

delle curve si ha per energie cui corrispondono stelle generate con in media tre rami ionizzanti secondo i dati ricavati dalle statistiche della scuola di Bristol ⁽⁷⁾.

Un ulteriore raffronto dei risultati ottenuti coi dati sperimentali può esser fatto valendosi delle stime di ROSSI ⁽⁸⁾ il quale dalle osservazioni di LEPRINCE RINGUET ⁽⁹⁾ e di ROCHESTER ⁽¹⁰⁾, ricava due valori approssimati dello spettro differenziale protonico al livello del mare per $E = 1,17$ e $E = 1,4$ rispettivamente; quest'ultimo è stato riportato nella fig. 1 (cerchietto); ambedue i valori, specialmente il primo, sono molto più alti di quello da noi otte-

nuto. Dai dati sperimentali di ANDERSON ⁽¹¹⁾ ROSSI ricava due dati sullo spettro integrale protonico al livello del mare per E compresa tra 1,1 e 1,4 e 1,4 e 3 GeV rispettivamente. Questi dati sono confrontati con quelli ottenuti dalla curva «p» della fig. 1 nella tabella II. Bisogna tuttavia osservare che i dati alle bassissime energie sono al limite o al di sotto della zona di validità della teoria.

⁽⁷⁾ R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

⁽⁸⁾ B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

⁽⁹⁾ L. LEPRINCE-RINGUET: *Comptes Rendus*, **221**, 406 (1945).

⁽¹⁰⁾ G. D. ROCHESTER: *Phys. Rev.*, **59**, 613 (1941); **60**, 198 (1941).

⁽¹¹⁾ C. D. ANDERSON: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 334 (1948).

TABELLA II. — *Numero nucleoni per $\text{cm}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{sterad}^{-1}$ al livello del mare.*

E (tot. in GeV)	Sperim. dal Rossi	Teorica dalla curva (p) di fig. 1
1,1 – 1,4	3×10^{-5}	$0,8 \times 10^{-5}$
1,4 – 3	2×10^{-5}	$1,6 \times 10^{-5}$

6. — Come già abbiamo accennato, le considerazioni che precedono possono ritenersi approssimativamente valide fino ad energie cinetiche dell'ordine di 200-300 MeV. Al di sotto di tale limite esse cadrebbero in difetto per le seguenti due ragioni principali che invaliderebbero l'impostazione da noi data al problema:

a) La trattazione prima in materia nucleare ed il trasporto della soluzione in materia ordinaria ha per effetto che le perdite di energia in materia nucleare vengano in tale modo considerate come diluite con continuità in tutto lo spessore dell'atmosfera attraversata. Quando l'energia del nucleone diventa molto bassa, ciò deve condurre a risultati inesatti; un nucleone infatti compie in media 20 urti nucleari nell'attraversare l'atmosfera; il percorso medio tra un urto e il successivo risulta quindi di 50 g/cm^2 . Ora dalla formula (3) risulta che per l'attraversamento di due terzi del diametro nucleare (spessore medio attraversato in ogni urto) la perdita di energia è circa 150 MeV; ciò significa che per energie al disotto di tale valore il nucleone viene fermato in ogni urto nucleare e che l'assorbimento diventa catastrofico; colla nostra trattazione noi continueremmo invece a considerare presenti e gradualmente degradanti per un ulteriore percorso di 50 g/cm^2 dei nucleoni che in realtà hanno già cessato di esistere in un urto unico. Inoltre in questo caso le probabilità di scambio di carica in ogni urto diventano trascurabili, con la conseguenza di una separazione stabile tra le due componenti neutronica e protonica la quale ultima viene rapidamente eliminata per le perdite per ionizzazione, il che rende conto del piccolo numero relativo di protoni alle bassissime energie.

b) La trattazione unidimensionale che costituisce una approssimazione sufficiente negli altri casi diventa del tutto errata per le bassissime energie, quando la diffusione diventa praticamente isotropa, sicchè non ha alcun senso il prescindere dalla considerazione degli angoli di diffusione.

Concludendo, possiamo dire che la trattazione qui svolta dell'andamento della componente nucleonica, mentre cerca di tenere conto di tutti gli effetti finora noti, permette in base a quelli di ritrovare in modo qualitativo, abbastanza soddisfacente, le principali caratteristiche di essa che ci sono finora note, non solo per le alte energie, ciò che era già stato ottenuto da H. e J., ma anche per le energie medie e in parte per le basse.

Per queste ultime il numero di nucleoni sembra risultare inferiore a quello trovato sperimentalmente; è ammissibile pensare che ciò potrebbe esser dovuto, tra l'altro, al fatto che alle basse energie il fenomeno della generazione dei nucleoni secondari avvenga secondo un meccanismo diverso da quello descritto mediante le sezioni d'urto (30).

Al limite estremo delle bassissime energie la presente trattazione e quindi i risultati, diventano del tutto inadeguati.

È nostro desiderio ringraziare il prof. G. PUPPI per diverse discussioni sull'argomento.

APPENDICE

Antitrasformazione della (11). — Si ha dalla (11) per definizione della anti-trasformata, con ovvio significato dei simboli:

$$S(E, t) = \frac{I\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\exp[\lambda t]}{\lambda - \lambda_0} G\left[(\lambda - \lambda_0) \frac{E}{\beta}\right] d\lambda.$$

Introdotta al posto della G la sua espressione esplicita e posto $p = \lambda - \lambda_0$ si ottiene facilmente:

$$S(E, t) = \frac{I\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \frac{\exp[\lambda_0 t]}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \exp[pt] p^\gamma dp \int_0^\infty \exp[-z] \left(p + \frac{\beta}{E} z\right)^{-(\gamma+1)} dz,$$

l'integrale rispetto a z si calcola osservando che esso non è che la trasformata di $(p + \beta E z)^{-(\gamma+1)}$ con parametro di trasformazione uguale a uno. Per la trasformazione di questa espressione conviene servirsi della corrispondenza generalizzata di BOREL ⁽¹²⁾; applicando inoltre le note regole elementari del calcolo simbolico si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp[-z] \left(p + \frac{\beta}{E} z\right)^{-(\gamma+1)} dz &= \\ &= \frac{\exp\left[\frac{pE}{\beta} \lambda\right]}{E} \beta \left(\frac{\lambda E}{\beta}\right)^\gamma \Gamma(-\gamma) - \int_{-\frac{Ep}{\beta}}^0 \exp[-z] \left(p + \frac{\beta}{E} z\right)^{-(\gamma+1)} dz. \end{aligned}$$

Introdotta la espressione così ottenuta nella precedente si procede alla anti-trasformazione con metodi elementari e si ottiene la (11) del testo.

⁽¹²⁾ R. POTIER e J. LAPLUME: *Le Calcul Symbolique* (Paris, 1943), p. 44.

Calcolo della (12). — Risulta da quanto detto nel testo che la (12) si ottiene partendo dalla

$$S(E, \theta) = \int_0^{\infty} S(E, t) P(\theta, t) dt = \frac{I\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \int_0^{\infty} \frac{\exp[\lambda_0 t] P(\theta, t)}{\left(1 + \frac{\beta}{E} t\right)^{\gamma+1}} dt,$$

che con la sostituzione $1 + \frac{\beta}{E} t = x$, si può scrivere:

$$S(E, \theta) = \frac{I\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \beta \exp\left[-\frac{\lambda_0}{\beta} E\right] \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[\frac{\lambda_0 E}{\beta} x\right] P\left(\theta, \frac{x-1}{\beta} E\right) 1(x-1)}{x^{\gamma+1}} dx,$$

ove $1(x)$ è l'integrale indefinito della funzione impulsiva di DIRAC.

Si ha dal calcolo simbolico che se $F(\lambda)$ è la trasformata di una generica funzione $f(x)$ vale la relazione:

$$\int_0^{\infty} \exp[-\lambda x] \frac{f(x)}{x^n} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} F(\lambda + z) z^{n-1} dz,$$

quindi

$$S(E, \theta) = \frac{I\gamma E_0^\gamma}{E^{\gamma+1}} \beta \frac{\exp\left[-\frac{\lambda_0}{\beta} E\right]}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^{\infty} F\left(-\frac{\lambda_0}{\beta} E + z\right) z^\gamma dz,$$

ove $F(\lambda)$ è la trasformata di $P\left(\theta, \frac{x-1}{\beta} E\right) 1(x-1)$.

Siccome è noto ⁽²⁾ che la trasformata di $P(\theta, t)$ è $\exp[-\theta n \Phi_A f(\lambda)]$ (vedi H e J ⁽²⁾), la $F(\lambda)$ si calcola facilmente con gli usuali procedimenti elementari del calcolo simbolico. Si ottiene così con semplici passaggi la (12) del testo.

Antitrasformazione della (14) e calcolo della (17). — Osservando che

$$\frac{J(E, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} \frac{G\left(\frac{\lambda - l_0}{\beta} E\right)}{\lambda - l_0} = \int_0^{\frac{E}{E_0}} G\left[(\lambda - \lambda_0) \frac{\left(1 - \frac{M^2}{E^2} z^2\right)}{\beta_0 z} E\right] \frac{G\left(\frac{\lambda - l_0}{\beta} E\right)}{\lambda - l_0} w(1-z) z^\gamma dz,$$

risulta che il parametro di trasformazione λ compare nella (16) tramite espressioni del tipo:

$$\frac{G[(\lambda - \lambda_0) P(E)]}{\lambda - \lambda_0} \frac{G[(\lambda - l_0) Q(E)]}{\lambda - l_0},$$

(ove P e Q sono opportune funzioni di E), cioè tramite prodotti di funzioni come la (11) di cui si conosce l'antitrasformata; l'operazione di antitrasformazione si esegue allora agevolmente con l'uso del noto teorema del prodotto integrale. Si ottiene così:

$$\begin{aligned} \bar{S}(E, t) = & \exp [\lambda_0 t] \int_0^{\frac{E}{E_0}} \int_0^t \frac{\exp [(l_0 - \lambda_0)t][v(z) + w(1-z)]z^\gamma}{\left[1 + \frac{\beta}{E}t\right]^{\gamma+1} \left[1 + \frac{\beta_0 z(t-\tau)}{E \left(1 - \frac{M^2}{E^2} z^2\right)}\right]^{\gamma+1}} d\tau dz + \\ & + \frac{I_\gamma}{E_0} \exp [l_0 U] \frac{\exp [\lambda_0(t-U)]}{\left[1 + \frac{\beta}{E_0}(1-U)\right]^{\gamma+1}} 1[t-U] + \\ & + 1(t-U) \exp [l_0 U] \frac{I_\gamma}{E_0} (w_{\gamma+1} + v_{\gamma+1}) \times \\ & \times \int_0^{t-U} \frac{\exp [\lambda_0(t-U-\tau)] \exp [l_0 \tau]}{\left[1 + \frac{\beta}{E}(t-U-\tau)\right]^{\gamma+1} \left[1 + \frac{\beta}{E}\tau\right]^{\gamma+1}} d\tau. \end{aligned}$$

Le integrazioni rispetto a τ si possono eseguire tramite successive integrazioni per parti prendendo gli esponenziali come fattori finiti. Si ottengono così delle serie di potenze di β_0/E rapidamente convergenti i cui termini dipendono da t come la (11'); ciò permette di passare allo spettro in materia ordinaria mediante procedimenti paralleli a quelli che hanno condotto dalla (11') alla (12). Si arriva così, dopo alcuni passaggi, trascurando i termini in β^2/E^2 alla (17).

Calcolo della probabilità $\Pi(\theta, \theta')$. — Partiamo dalla (25) del testo che possiamo porre nella forma:

$$(25') \quad \Pi(\theta, \theta') = \exp [-p] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}(p-p')\right]^l}{(l!)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2}p'\right]^k (k+l)!}{(k!)^2},$$

poniamo ora:

$$(25'') \quad \begin{cases} \frac{1}{2}p' = A, & \frac{1}{2}(p-p') = B, \\ P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! A^k \lambda^{k+1}}{(k!)^2} = \lambda' \exp [A\lambda], \end{cases}$$

osserviamo che

$$(25''') \quad \frac{d^l P(\lambda)}{d\lambda^l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+l)! A^k \lambda^k}{(k!)^2},$$

allora la seconda sommatoria della (25') non è che la (25''') ove si ponga $\lambda = 1$. È facile allora eseguendo la ellesima derivazione rispetto a λ della (25'') porre la (25') nella forma:

$$\begin{aligned} (25^{IV}) \quad \Pi(\theta, \theta') &= \exp[-p] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{(l!)^2} \sum_{m=0}^l \binom{l}{l-m} \frac{A^m}{m!} \exp[A] = \\ &= \exp[(A-p)] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \sum_{l=m}^{\infty} \binom{l}{l-m} \frac{B^l}{l!} = \\ &= \exp[(A-p)] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(AB)^m}{(m!)^2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{B^{l-m}}{(l-m)!} = \exp[(A+B-p)] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(AB)^m}{(m!)^2}. \end{aligned}$$

La sommatoria non è che la nota funzione di BESSEL di ordine 0 e argomento immaginario di coefficiente $2\sqrt{AB}$.

Si ha dunque la (27) del testo.

Per calcolare la $\Pi_P(\theta, \theta')$ poniamo la (26) nella forma:

$$\begin{aligned} (26') \quad \Pi_P(\theta, \theta') &= \exp[-p] \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{p'}{2}\right]^k \left[\frac{p-p'}{2}\right]^l (k+l-1)!}{(k-1)! k! (l!)^2} = \\ &= \exp[-p] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)! k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l (k+l-1)!}{(l!)^2}, \end{aligned}$$

analogamente a quanto fatto nel calcolo precedente si osserva che la seconda sommatoria della (26') non è che la derivata di ordine $(k-1)$ di $\lambda^{(k-1)} \exp[A\lambda]$ con $\lambda = 1$.

Procedendo parallelamente si ottiene:

$$\Pi_P(\theta, \theta') = \exp[B-p] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{(m!)^2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{A^{l+1}}{(l-m)! (l+1)!},$$

dalla quale si ha:

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial A} = \exp[B-p] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(AB)^m}{(m!)^2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{A^{l-m}}{(l-m)!},$$

il cui secondo membro è formalmente identico al secondo membro della (25^{IV}). Avremo allora che

$$\begin{aligned} (26'') \quad \Pi_P(\theta, \theta') &= \exp[(B-p)] \int_0^A \exp[A] J_0(i2\sqrt{AB}) dA = \\ &= \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{1}{2}(p+p')\right] p' \int_0^1 \exp\left[\frac{1}{2}\lambda p'\right] J_0[i\sqrt{\lambda p'(p-p')}] d\lambda. \end{aligned}$$

La Π_Y si ottiene dalla precedente sostituendo $p - p'$ a p' . Paragonando le (28) con la (26') si riconosce facilmente che $\Pi^P(\theta, \theta') = 2\Pi_P(\theta, \theta')$. Per il calcolo della $\Pi_P^P(\theta, \theta')$ che con le precedenti notazioni risulta:

$$\Pi_P^P(\theta, \theta') = 2 \exp[-p] \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{(k-2)!k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l (k+l-1)}{(l!)^2}.$$

si procede in modo analogo a quello seguito nei calcoli precedenti giungendo all'espressione

$$\Pi_P^P(\theta, \theta') = 2 \exp[B-p] \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{(m!)^2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{A^{l+2}}{(l-m!)(l+1)(l+2)},$$

che derivata due volte rispetto ad A conduce alla:

$$\frac{d^2 \Pi_P^P}{dA^2} = 2 \exp[(A+B-p)] J_0(2i\sqrt{AB}),$$

da cui

$$\Pi_P^P(\theta, \theta') = 2 \exp[B-p] \int_0^A dA' \int_0^{A'} \exp[A''] J_0(2i\sqrt{A''B}) dA'',$$

che, integrata per parti porta al risultato del testo.

SUMMARY

The authors discuss the development of the nucleonic component of cosmic rays in air. It is assumed that it is generated by, and still partly composed of, the primary nucleons which interact with the nucleons of the air, and that the differential cross section both for the energy loss of nucleons and for the expulsion of the secondary nucleons from the air nuclei, is of the bremsstrahlung type. Account is taken of the energy loss caused by slowing down in nuclear matter, and for energy loss caused by ionisation produced by nucleons which are in proton state. Taking into account this loss of energy and the probability that a nucleon has travelled a certain part of its path as a proton and the rest as a neutron, a calculation is made to ascertain the ratio of protonic and nucleonic components. The limits of validity of the method are discussed and the results are compared with the experimental data.

Principi variazionali per i coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale.

G. TORALDO DI FRANCIA

Istituto di Fisica dell'Università di Firenze

(ricevuto il 25 Marzo 1950)

Riassunto. Si danno per il calcolo dei coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale tre principi variazionali analoghi a quelli usati per i problemi d'urto. Si fanno alcune semplici applicazioni.

Introduzione.

1. — I metodi variazionali noti da tempo per il calcolo degli autovalori negli stati a energia negativa ⁽¹⁾ ⁽²⁾ sono stati estesi negli ultimi anni dal caso dello spettro discreto a quello dello spettro continuo, in modo da consentire il calcolo degli sfasamenti asintotici e quindi delle sezioni di urto. Il primo a procedere in questo senso è stato HULTHÉN ⁽³⁾. Un altro principio variazionale è stato dato da TAMM ⁽⁴⁾, il quale non ha mancato di rilevarne la parentela con quello di HULTHÉN. SU-SHU HUANG ⁽⁵⁾ ha esteso il metodo di TAMM, in modo da applicarlo alla diffusione degli elettroni da parte dell'idrogeno neutro (problema dei tre corpi).

Recentemente questi principi variazionali sono stati notevolmente perfezionati da SCHWINGER e dalla sua scuola, che ne hanno esteso il campo di applicazione ai più svariati rami della fisica. Purtroppo SCHWINGER non ha

⁽¹⁾ F. HUND: *Allg. Quantenmech. des Atom- und Molekelbaues*, in *Handb. der Phys.* di GEIGER e SCHEEL, vol. 24 (Berlino, 1933), p. 575.

⁽²⁾ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), p. 78.

⁽³⁾ L. HULTHÉN: *K. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhandl.*, 14, 21 (1944); *Ark. f. Math. Astr. o. Fys.*, 35, 25 (1948).

⁽⁴⁾ I. E. TAMM: *Jurn. Exp. i Teor. Fis. SSSR*, 18, 337 (1948).

⁽⁵⁾ SU-SHU HUANG: *Phys. Rev.*, 76, 477 (1949).

ancora pubblicato i suoi metodi generali ⁽⁶⁾ e non resta che ricostruirli attraverso i lavori degli scolari e collaboratori, o, comunque, di coloro che hanno potuto vedere le dispense dei suoi corsi. Per esempio i principi di SCHWINGER per il caso dei problemi di urto emergono chiaramente dai lavori di KOHN ⁽⁷⁾ e di BLATT e JACKSON ⁽⁸⁾; anzi KOHN li ha estesi in modo da renderli applicabili ai problemi di urto fra nuclei leggeri.

Lo stesso SCHWINGER in collaborazione con LEVINE ⁽⁹⁾ ha trattato con successo mediante i principi variazionali il problema della diffrazione scalare attraverso a un'apertura circolare praticata in uno schermo perfettamente riflettente. E MILES ⁽¹⁰⁾ ha esteso la trattazione alla diffrazione delle onde elettromagnetiche. La formulazione più generale per il caso elettromagnetico sembra quella di KISUN'KO ⁽¹¹⁾.

Ho già notato ⁽¹²⁾ che i principi variazionali si possono adattare *mutatis mutandis*, al calcolo dei coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale. Vengono così ad essere interessati vari altri campi di applicazione, che vanno dalla fisica atomica e nucleare (estrazione elettronica a freddo, emissione α ecc.), all'ottica, all'acustica, alla radiotecnica (strati antiriflettenti, filtri interferenziali, riflessione atmosferica e ionosferica, adattamento d'impedenza fra due guide d'onda per mezzo di un tronco d'impedenza variabile, ecc.).

Daremo qui la formulazione di tre principi variazionali analoghi a quelli di HULTHÉN, di TAMM e di SCHWINGER, per il caso che la barriera di potenziale sia piana (a strati equipotenziati piani paralleli) e l'onda incidente sia piana, d'inclinazione qualsiasi.

2. - La funzione d'onda ψ sia soggetta all'equazione

$$(1) \quad \nabla^2 \psi + k^2(x) \psi = 0,$$

essendo $k(x) = k_0$ per $x < 0$, $k(x) = k_a$ per $x > a$, con k_0 e k_a costanti, mentre la forma della funzione $k(x)$ per $0 < x < a$ caratterizza la barriera di potenziale. Eventualmente la profondità a della barriera potrà essere infinita. Inoltre $k(x)$ potrà anche essere complessa (strati assorbenti).

L'onda incidente abbia la forma $A \exp[ik_0(\alpha_0 x + \beta_0 y)]$; pertanto l'onda riflessa sarà $rA \exp[ik_0(-\alpha_0 x + \beta_0 y)]$, avendo indicato con r il coefficiente

⁽⁶⁾ Con una recente lettera H. LEVINE ha gentilmente informato l'autore che egli sta collaborando con SCHWINGER per una completa esposizione dei metodi variazionali e delle loro applicazioni.

⁽⁷⁾ W. KOHN: *Phys. Rev.*, **74**, 1763 (1948).

⁽⁸⁾ J. M. BLATT e J. D. JACKSON: *Phys. Rev.*, **76**, 18 (1949).

⁽⁹⁾ H. LEVINE e J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 958 (1948); **75**, 1423 (1949); **76**, 1608 (1949).

⁽¹⁰⁾ J. W. MILES: *Phys. Rev.*, **75**, 695 (1949); *Journ. Appl. Phys.*, **20**, 760 (1949).

⁽¹¹⁾ G. V. KISUN'KO: *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **66**, 863 (1949).

⁽¹²⁾ G. TORALDO DI FRANCA: *Phys. Rev.*, **77**, 1 maggio 1950.

di riflessione. L'onda emergente sia $\kappa A \exp [ik_a(\alpha_a x + \beta_a y)]$, dove κ rappresenta il coefficiente di trasmissione. Per la legge della rifrazione avremo $k_0 \beta_0 = k_a \beta_a$.

Anche all'interno della barriera di potenziale ψ ha la forma

$$(2) \quad \psi = u(x) \exp [ik_0 \beta_0 y] .$$

Sostituendo nella (1) troviamo l'equazione differenziale di u

$$(3) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + (k^2 - k_0^2 \beta_0^2) u = 0 .$$

Definendo ora i coseni direttori $\alpha(x)$, $\beta(x)$ mediante le equazioni $k(x)\beta(x) = k_0 \beta_0$, $\alpha^2(x) = 1 - \beta^2(x)$, dalle quali risulta in particolare $\beta(0-) = \beta_0$, $\alpha(0-) = \alpha_0$, $\beta(a+) = \beta_a$, $\alpha(a+) = \alpha_a$, la (3) si scriverà

$$(4) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 \alpha^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + h^2(x) u = 0 ,$$

avendo posto $h(x) = k(x)\alpha(x) = [k^2(x) - k_0^2 \beta_0^2]^{1/2}$.

Nonostante che ψ e u siano quantità scalari, la (4) contiene anche il caso del campo elettromagnetico. Infatti si può definire un vettore di HERTZ Π_x , normale alla barriera, che obbedisce a un'equazione del tipo (4), dove a $k\alpha$ va sostituita una espressione un po' più complicata, dipendente anche dalle derivate di k e di α ⁽¹³⁾. Tuttavia qui per semplicità ci riferiremo al caso scalare, rimandando ad altro lavoro per la trattazione elettromagnetica.

Dovremo soddisfare la (4) con una u continua insieme con la derivata prima, e soggetta alle condizioni

$$(5) \quad \begin{cases} u(x \leq 0) = A[\exp(ih_0 x) + r \exp(-ih_0 x)] , \\ u(x \geq a) = A\kappa \exp[ih_a x] , \end{cases}$$

dove r e κ sono costanti incognite ed è stato posto $h(0) = h_0$, $h(a) = h_a$. D'ora innanzi, menzionando le (5), intenderemo d'indicare anche le condizioni relative alle derivate prime.

Primo principio variazionale.

3. - Consideriamo ora l'integrale

$$(6) \quad I = \int_0^a u \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + h^2 u \right) dx$$

che è nullo se u soddisfa la (4).

⁽¹³⁾ H. BREMMER: *Physica*, **15**, 593 (1949).

Supponiamo appunto di aver trovato la u che soddisfa la (4) e le (5) e diamole una variazione δu (continua insieme con la sua derivata prima). Tale variazione sia arbitraria al di dentro della barriera, mentre al di fuori di essa si traduca in una variazione δr , δx dei coefficienti r e x . Tenendo conto della (4) e applicando la seconda formula di GREEN per il caso unidimensionale, si deduce facilmente dalla (6)

$$\delta I = \int_0^a \left(u \frac{d^2 \delta u}{dx^2} - \delta u \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = \left[u \frac{d \delta u}{dx} - \delta u \frac{du}{dx} \right]_0^a,$$

da cui, per la continuità di u , δu e delle loro derivate prime, si ricava

$$(7) \quad \delta I = 2i\hbar_0 A^2 \delta r.$$

È questo il primo principio variazionale per il coefficiente di riflessione. Esso può anche scriversi nella forma

$$\delta(r - I/2i\hbar_0 A^2) = 0.$$

L'espressione in parentesi è eguale a r , quando per u si scelga la funzione giusta. Ma rimane stazionaria se invece di u si usa una funzione di approssimazione $u_t = u + \delta u$, che dia luogo ad una r_t e ad una I_t . Pertanto scriveremo

$$(8) \quad r = r_t - I_t/2i\hbar_0 A^2.$$

È questa la forma più comoda per l'applicazione del primo principio variazionale. Non sarà inutile notare che r_t si determina sottoponendo u_t alle condizioni (5); si ottengono così quattro equazioni, che oltre a fornire i valori di r_t e x_t , impongono alla u_t due condizioni di struttura.

4. - Vediamo con qualche semplice esempio l'utilità della (8). Sia $k_a = k_0$ e supponiamo che all'interno della barriera k si discosti poco da k_0 . In questo caso la più semplice funzione di approssimazione è $u_t = \exp[i\hbar_0 x]$, cioè l'onda incidente. Questa funzione soddisfa evidentemente le (5) con $A = 1$, $r_t = 0$, $x_t = 1$. Sostituendo nella (6) e nella (8), si ottiene subito

$$(9) \quad r = -\frac{1}{2i\hbar_0} \int_0^a (h^2 - h_0^2) \exp[2i\hbar_0 x] dx = -\frac{1}{2ik_0\alpha_0} \int_0^a (k^2 - k_0^2) \exp[2ik_0\alpha_0 x] dx.$$

La (9) rappresenta, come vedremo in seguito, quella che si potrebbe chiamare l'approssimazione di BORN.

Un'altra formula interessante si ottiene prendendo per u_i l'approssimazione WKB ⁽¹⁴⁾. Nel caso d'incidenza obliqua essa può scriversi

$$(10) \quad u_i(x) = h^{-1/2} \exp \left[i \int_0^x h(\xi) d\xi \right].$$

Naturalmente per fare uso di questa approssimazione bisogna ammettere che h (e quindi k) sia continua insieme con la sua derivata prima. Pertanto sarà $h'(0) = h'(a) = 0$ e le (5) sono soddisfatte con $A = h_0^{-1/2}$, $r_i = 0$. Sostituendo nella (6) e nella (8), si trova

$$(11) \quad r = \frac{i}{8} \int_0^a dx (3h^{-3}h'^2 - 2h^{-2}h'') \exp \left[2i \int_0^x h(\xi) d\xi \right].$$

Si ottiene così la prima approssimazione data da RYDBECK ⁽¹⁶⁾ per il caso dell'incidenza normale. Veramente la formula di RYDBECK farebbe comparire nel secondo integrando della (11) oltre al termine h anche l'espressione $3h^{-3}h'^2 - 2h^{-2}h''$. Ma poichè l'approssimazione (10) è valevole soltanto se tale espressione è trascurabile rispetto ad h lungo tutto il cammino d'integrazione, le due formule sono equivalenti. Se lungo l'asse reale l'espressione menzionata non si mantiene ovunque trascurabile, in particolare se h presenta degli zeri fra 0 e a , la (11) può essere tuttavia usata purchè in tale intervallo h sia analitica. Infatti potrà esistere un *buon cammino* ⁽¹⁷⁾ d'integrazione fra 0 e a , diverso dall'asse reale, lungo il quale l'approssimazione (10) si mantiene buona.

Naturalmente approssimazioni migliori si possono ottenere con il classico metodo di RITZ ⁽¹⁸⁾, scegliendo una u_i contenente alcuni parametri c_i ed annullando le derivate del secondo membro della (8) rispetto a tutte le c_i ⁽¹⁹⁾.

⁽¹⁴⁾ Adottiamo la sigla ormai usuale, quantunque ad essa bisognerebbe premettere una R, essendo stato Lord RAYLEIGH il primo ad usare questa approssimazione ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁵⁾ LORD RAYLEIGH: *Proc. Roy. Soc.*, **86**, 218 (1912).

⁽¹⁶⁾ O. E. H. RYDBECK: *Trans. Chalmers Univ. Technol.*, Göteborg Nr. 74 (1948).

⁽¹⁷⁾ E. C. KEMBLE: *Phys. Rev.*, **48**, 549 (1935).

⁽¹⁸⁾ R. COURANT e D. HILBERT: *Methoden der Math. Phys.*, vol. I (Berlino, 1924). p. 157.

⁽¹⁹⁾ Come hanno notato KOHN ⁽⁷⁾ e SU-SHU HUANG ⁽²⁰⁾, l'aggiungere la condizione di annullamento del secondo membro della (6), come fa HULTHÉN, complica inutilmente le cose.

⁽²⁰⁾ SU-SHU HUANG: *Phys. Rev.*, **76**, 1878 (1949).

Secondo principio variazionale.

5. - Il metodo di TAMM non sembra vantaggiosamente applicabile nel nostro caso, perchè impone una forma praticamente troppo restrittiva alla funzione d'onda.

Un principio variazionale analogo si ottiene invece mediante l'integrale

$$(12) \quad H = \int_0^a \left[- \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \hbar^2 u^2 \right] dx.$$

Applicando la prima formula di GREEN per il caso unidimensionale (integrazione per parti), si ottiene

$$H = \int_0^a u \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \hbar^2 u \right) dx - [uu']_0^a,$$

e, ricordando la (6)

$$(13) \quad H = I - u(a)u'(a) + u(0)u'(0).$$

Se u è la vera soluzione del problema, avremo $I = 0$, mentre per la prima delle (5) si può scrivere $u(0)u'(0) = i\hbar_0 u^2(0)(1-r)/(1+r)$, così che la (13) diviene

$$(14) \quad i\hbar_0 u^2(0) \frac{1-r}{1+r} = u(a)u'(a) + H.$$

Ora, se si dà ad u una variazione δu , si constata che la (14) rimane soddisfatta mantenendo costante il rapporto $(1-r)/(1+r)$ che compare al primo membro. Basta osservare che in tal caso la variazione del primo membro è, a causa della prima delle (5)

$$2i\hbar_0 u(0) \frac{1-r}{1+r} \delta u(0) = 2i\hbar_0 A^2(1-r) \delta r$$

mentre la variazione del secondo membro, tenendo conto della (13), della (7) e della prima delle (5), risulta

$$2i\hbar_0 A^2 \delta r + u(0) \delta u'(0) + u'(0) \delta u(0) = 2i\hbar_0 A^2(1-r) \delta r.$$

Osservando che per la seconda delle (5) è $u(a)u'(a) = i\hbar_a u^2(a)$, se ne conclude che, se calcoliamo il coefficiente di riflessione con la formula

$$(15) \quad \frac{1-r}{1+r} = \frac{i\hbar_a u^2(a) + H}{i\hbar_0 u^2(0)},$$

si ottiene un valore stazionario per piccole variazioni di u attorno al suo valore esatto. È questo il secondo principio variazionale.

6. — La (15) sembra più potente della (8), come vediamo con qualche esempio particolarmente semplice.

La barriera sia di spessore nullo ($a = 0$), cioè si abbia a che fare con un semplice gradino di potenziale. Avremo $H = 0$ e, per la continuità di u , $u(a) = u(0)$. Pertanto dalla (15) si ricava

$$\frac{1-r}{1+r} = \frac{h_a}{h_0}.$$

Se φ è l'angolo d'incidenza ($\cos \varphi = \alpha_0$) e φ' quello di rifrazione ($\cos \varphi' = \alpha_a$), questa equazione fornisce ($h = k\alpha$)

$$r = \frac{k_0 \cos \varphi - k_a \cos \varphi'}{k_0 \cos \varphi + k_a \cos \varphi'},$$

cioè il valore esatto di r .

Come secondo esempio prendiamo per funzione di prova l'approssimazione WKB, secondo la (10). Si ottiene sostituendo nella (12)

$$\begin{aligned} H_t &= \int_0^a dx \left(2h + ih^{-1}h' - \frac{1}{4} h^{-3}h'^2 \right) \exp \left[2i \int_0^x h(\xi) d\xi \right] = \\ &= -i \exp \left[2i \int_0^a h(\xi) d\xi \right] + i \int_0^a dx \left(h^{-1}h' + \frac{1}{4} ih^{-3}h'^2 \right) \exp \left[2i \int_0^x h(\xi) d\xi \right], \end{aligned}$$

da cui, per la (15)

$$(16) \quad \frac{1-r}{1+r} = 1 + \int_0^a dx \left(h^{-1}h' + \frac{1}{4} ih^{-3}h'^2 \right) \exp \left[2i \int_0^x h(\xi) d\xi \right].$$

Ora questa approssimazione è buona quando $|r|$ è molto piccolo (infatti la funzione di prova (10) corrisponde a $r_t = 0$) e $h^{-1}h' \ll h$; in tal caso la (17) può scriversi

$$(17) \quad r = -\frac{1}{2} \int_0^a dx h^{-1}h' \exp \left[2i \int_0^x h(\xi) d\xi \right].$$

Si ottiene così la prima approssimazione di BREMMER ⁽²¹⁾. Essa sembra più vantaggiosa di quella di RYDBECK, perchè non fa comparire la derivata seconda di h ed impone quindi a tale funzione condizioni meno restrittive.

Risultati migliori si ottengono anche in questo caso col metodo di RITZ, oppure adottando una delle successive approssimazioni di BREMMER.

Terzo principio variazionale.

7. - Seguendo l'esempio di SCHWINGER, otterremo un terzo principio variazionale, mediante trasformazione dell'equazione differenziale (4) in un'equazione integrale. Supporremo d'ora innanzi che sia $k_0 = k_o$. La (4) può scriversi così

$$(18) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + h_o^2 u = - (h^2 - h_o^2) u = - (k^2 - k_o^2) u.$$

Introduciamo la funzione di GREEN $G(x, x')$, che, nel nostro caso, soddisfa la equazione non omogenea

$$(19) \quad \frac{d^2 G}{dx^2} + h_o^2 G = \delta(x - x'),$$

essendo $\delta(x - x')$ la funzione di DIRAC. Si verifica facilmente che è

$$(20) \quad G = \frac{\exp(ih_o |x - x'|)}{2ih_o},$$

Allora, supponendo noto l'ultimo membro della (18), si può ottenere formalmente

$$(21) \quad u(x) = \exp(ih_o x) - \int_0^a [k^2(x') - k_o^2] u(x') G(x, x') dx',$$

dove all'integrale che dà la soluzione dell'equazione non omogenea (18) abbiamo aggiunto la soluzione $\exp[ih_o x]$ della parte omogenea, che rappresenta l'onda incidente. Si constata subito che la soluzione (21) soddisfa le (5) con $A = 1$ e

$$(22) \quad r = - \int_0^a dx' \frac{k^2(x') - k_o^2}{2ih_o} u(x') \exp(ih_o x').$$

⁽²¹⁾ H. BREMMER: *Handel. XXVII Nederl. Natuur- en Geneskundig Congres*, Nijmegen (1939), p. 88.

Inoltre si verifica con queste formule che la (9) non è altro che l'approssimazione di BORN. Moltiplicando la (21) per $[k^2(x) - k_0^2]u(x)/2i\hbar_0$ e integrando, si ottiene

$$(23) \quad \int_0^a dx \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} u(x) \exp[i\hbar_0 x] = \\ = \int_0^a \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} u^2(x) dx + \frac{1}{2i\hbar_0} \int_0^a \int_0^a dx dx' [k^2(x') - k_0^2] u(x') G(x, x') [k^2(x) - k_0^2] u(x).$$

Moltiplichiamo poi il secondo membro della (22) per una frazione di valore 1, che ha per numeratore il primo membro e per denominatore il secondo membro della (23). Si avrà

$$(24) \quad r = \frac{\left[\int_0^a dx \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} u(x) \exp[i\hbar_0 x] \right]^2}{\int_0^a \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} u^2(x) dx + \frac{1}{2i\hbar_0} \int_0^a \int_0^a dx dx' [k^2(x') - k_0^2] u(x') G(x, x') [k^2(x) - k_0^2] u(x)}$$

Questa espressione di r è stazionaria per piccole variazioni δu di u attorno al suo valore esatto. Infatti, se questa affermazione è vera, si dovrà avere

$$r \left\{ 2 \int_0^a \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} u(x) \delta u(x) dx + \right. \\ \left. + 2 \int_0^a \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} \delta u(x) dx \int_0^a dx' [k^2(x') - k_0^2] u(x') G(x, x') \right\} = \\ = -2 \int_0^a dx' \frac{k^2(x') - k_0^2}{2i\hbar_0} u(x') \exp[i\hbar_0 x'] \int_0^a dx \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} \delta u(x) \exp[i\hbar_0 x].$$

Dividendo ambo i membri per $2r$, tenendo conto della (22)

$$\int_0^a dx \frac{k^2(x) - k_0^2}{2i\hbar_0} \delta u(x) \left\{ u(x) - \exp[i\hbar_0 x] + \int_0^a dx' [k^2(x') - k_0^2] u(x') G(x, x') \right\} = 0.$$

E questa relazione è verificata per qualunque δu , a causa dell'equazione integrale (21).

Per le applicazioni è bene tener presente che la stazionarietà di r significa che, se nella (23) sostituiamo una u che differisce da quella vera per quantità piccole dell'ordine di ε , la r che si ottiene coincide con quella esatta a meno di quantità dell'ordine di ε^2 .

8. — Diamo ora un'applicazione della (24) che, ricordando l'espressione (20) di G , scriviamo così

$$(25) \quad r = \frac{\left\{ \int_0^a dx [k^2(x) - k_0^2] u(x) \exp[ih_0 x] \right\}^2}{2ih_0 \int_0^a [k^2(x) - k_0^2] u^2(x) dx + \int_0^a \int_0^a dx dx' [k^2(x') - k_0^2] u(x') \exp[ih_0 |x - x'|] [k^2(x) - k_0^2] u(x)}$$

Da questa si constata anzitutto che per $h_0 \rightarrow 0$ (incidenza radente), si ottiene in ogni caso $r = -1$ (riflessione totale).

Supponiamo ora che la lunghezza d'onda sia molto grande (o, per meglio dire, molto maggiore dello spessore della barriera). Qui bisogna distinguere fra il caso delle particelle materiali, in cui $k^2(x) - k_0^2$ è indipendente dalla lunghezza d'onda (infatti è eguale a $-2mV/\hbar^2$, essendo V il potenziale, e non dipende dall'energia della particella incidente) ⁽²²⁾ e il caso acustico in cui tanto $k(x)$ quanto k_0 sono inversamente proporzionali alla lunghezza d'onda.

Per le particelle materiali di energia trascurabile basta porre $h_0 = 0$ nella (25) per ottenere $r = -1$. Si ha dunque riflessione totale, indipendentemente dall'angolo d'incidenza; le particelle non possono attraversare la barriera, come è logico.

Nel caso acustico invece la (4) dimostra che, a meno d'infinitesimi di ordine superiore a $1/\lambda$ (essendo λ la lunghezza d'onda) $u(x)$ è una funzione lineare. Dalle condizioni (5) poi si ricava, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore a $1/\lambda$ e a meno di una costante moltiplicativa che non interessa (perchè la (25) è omogenea di ordine zero in u)

$$u = 1 + ih_0 x.$$

Sostituendo questa u nella (25), otterremo un valore di r esatto a meno d'infinitesimi di ordine superiore a $1/\lambda^2$. Conservando allora nella (25) soltanto i

⁽²²⁾ Anche la propagazione delle radioonde nella ionosfera corrisponde a questo caso, perchè, come ha fatto notare ECKERSLEY ⁽²³⁾, la relativa equazione è del tipo di quella di SCHRÖDINGER, essendo il potenziale proporzionale alla densità elettronica e indipendente dalla lunghezza d'onda.

⁽²³⁾ T. L. ECKERSLEY: *Proc. Roy. Soc.*, **132**, 83 (1931).

termini che danno nel risultato finale infinitesimi di ordine non superiore a $1/\lambda^2$ ed escludendo il caso $\varphi = 0$ dell'incidenza radente, si giunge con un semplice calcolo, che omettiamo, alla formula

$$(26) \quad r = \frac{ic_1}{\cos \varphi} \frac{a}{\lambda} - \left(c_2 + \frac{c_1^2}{\cos^2 \varphi} \right) \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2 + O \left[\left(\frac{a}{\lambda} \right)^3 \right],$$

dove le costanti c_1 e c_2 hanno i valori

$$(27) \quad c_1 = \pi \left(\frac{1}{a} \int_0^a \frac{k^2}{k_0^2} dx - 1 \right), \quad c_2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{k^2}{k_0^2} x dx - \frac{1}{2} \right),$$

e sono pertanto due numeri puri indipendenti dalla lunghezza d'onda e dall'angolo d'incidenza. La (26) è una legge generale, valevole per tutti gli strati sottili rispetto alla lunghezza d'onda.

Va da sè che anche dal terzo principio esposto si possono avere ottimi risultati applicando il metodo dei parametri variazionali ⁽²⁴⁾.

⁽²⁴⁾ Il presente articolo era già in bozze, quando è apparso un lavoro di KOPFE ⁽²⁵⁾, che dà l'espressione (17) sotto forma d'integrale di STIELTJES. Inoltre l'autore è venuto a conoscenza di due lavori di RICE ⁽²⁶⁾, relativi alla riflessione nelle guide d'onda con un gomito, nel primo dei quali si trova accennato un principio variazionale analogo al principio di SCHWINGER, mentre nel secondo si trova, fra l'altro, la formula (11).

⁽²⁵⁾ H. KOPFE: *Zeits. Naturforsch.*, **5**, 131 (1950).

⁽²⁶⁾ S. O. RICE: *Bell Sys. Techn. Journ.*, **28**, 104; 136 (1949).

SUMMARY

Several variational principles have been derived in recent years by HULTHÉN, TAMM, SCHWINGER and others for dealing with scattering problems. This paper is concerned with the application of three similar principles to the computation of the reflection coefficient of a potential barrier for an incident plane wave of arbitrary direction. These principles are represented respectively by the Eqs. (9), (15) and (25), each giving a value of the reflection coefficient r , which is stationary for small variations of the wave function u about its true value. Some simple examples of application are given by using the WKB approximation. The first two terms of a series expansion are given in the Eq. (26) for a thin barrier, in the acoustical case.

Sulla possibilità di ridurre gli impulsi di fondo dei fotomoltiplicatori " 931 A " mediante un elettrodo esterno.

A. DRIGO

Istituto di Fisica dell'Università di Padova

(ricevuto il 31 Gennaio 1950)

Riassunto. — Nei fotomoltiplicatori « 931 A » la corrente di oscurità (fondo) dipende, tra l'altro, dal potenziale acquisito dal bulbo di vetro. Studiando questa dipendenza non solo per la corrente totale ma anche per quel che riguarda il numero e l'ampiezza degli impulsi che la costituiscono, si trova la possibilità di ridurre il numero degli impulsi di fondo con la semplice applicazione sul bulbo di una lamina tenuta ad un potenziale circa 200 V più basso di quello del fotocatodo (in valore assoluto).

Nel corso di alcune ricerche per applicare i fotomoltiplicatori (F.M.) 931 A alla rivelazione delle radiazioni col metodo delle scintillazioni ho potuto constatare che il contatto del bulbo di essi con conduttori a terra dava luogo ad un aumento rilevante del numero degli impulsi che costituiscono la corrente di oscurità di questi tubi, mentre si poteva osservare una diminuzione se gli stessi conduttori erano mantenuti ad un conveniente potenziale negativo.

Avendo eseguito uno studio un po' dettagliato di tale fenomeno, ne è emersa la possibilità di ridurre gli impulsi di fondo dei F.M. 931 A ad un livello più basso di quello che presenterebbero nelle normali condizioni di funzionamento. Ritengo pertanto utile riferirne i risultati.

Nelle misure per la rivelazione degli impulsi è stato usato un amplificatore proporzionale a larga banda, di guadagno inferiore a 10 000: gli impulsi uscenti da questo venivano quindi mandati in un selettore di ampiezza. Quelli di ampiezza superiore ad un livello prefissato venivano infine contati con un circuito a demoltiplicatore fino a 8096, del potere risolutivo di 5 μ s. L'amplificazione era regolata preventivamente in modo che, per tutti i tubi esaminati, i più grandi impulsi non superassero, all'uscita, i 100 volt, onde rimanere nel campo di sensibilità del selettore.

Le curve 1, 2, 3 e 4 della fig. 1, che si riferiscono ad impulsi di ampiezza superiore o eguale a quella indicata su ognuna di esse, mostrano come si modifica il numero di imp/s, di fondo, dei F.M. 931 A usati senza zoccolo, al variare del potenziale dell'elettrodo applicato sul vetro, e in relazione con le diverse ampiezze.

L'andamento di tali curve è risultato caratteristico della maggior parte dei F.M. esaminati (qualche diecina), pure sussistendo delle differenze quantitative anche notevoli tra tubo e tubo. Per dedurre da esse come venga ridotto

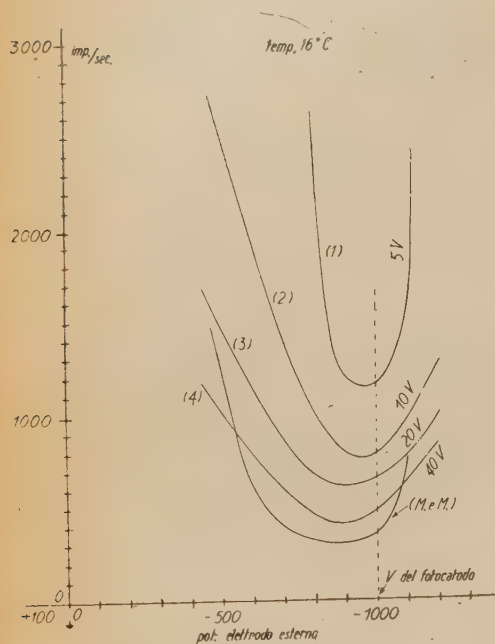


Fig. 1.

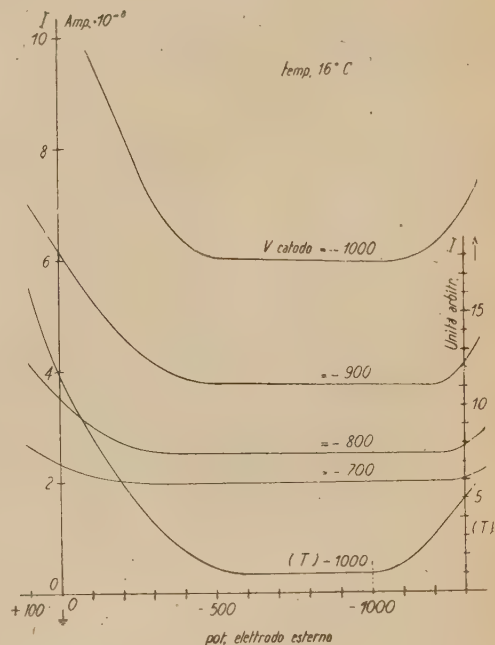


Fig. 2.

il numero degli impulsi di fondo delle diverse altezze, al variare del potenziale dell'elettrodo esterno, si deve ricordare che il bulbo del F.M. 931 A, lasciato libero, assume spontaneamente un potenziale da -450 V fino a -500 V, quando il tubo funziona con -1000 V al fotocatodo.

Una curva di significato analogo a quello delle curve da me riportate, per la quale tuttavia non è stato specificato dagli Autori il livello degli impulsi cui essa si riferisce, è stata riportata da MORTON e MITCHELL ⁽¹⁾ in *R.C.A. Review* e in *Nucleonics*: da quest'ultima io l'ho riprodotta (curva M. e M. di fig. 1) per facilità di confronto.

Anche TAYLOR ⁽²⁾ ha recentemente reso noto i risultati di uno studio analogo al mio. Egli però ha misurato il disturbo di fondo con un amplificatore

(1) G. A. MORTON e J. A. MITCHELL: *R.C.A. Rev.*, **9**, 632 (1948); *Nucleonics*, **4**, fasc. 1, 16 (1949).

(2) C. TAYLOR: *Journ. de Phys.*, **10**, 255 (1949).

con guadagno fino a 100 000, seguito da un diodo che, rettificando i segnali amplificati, consentiva di misurare con un microamperometro la corrente media corrispondente. La curva T di fig. 2 riproduce i risultati che TAYLOR ha in tal modo trovato.

La differenza tra questa curva e quelle da me ottenute mi ha fatto pensare che essa fosse in relazione coi diversi metodi di misura impiegati. Infatti nelle mie misure, per la minore amplificazione e con l'uso del selettore di ampiezza, vengono presi in considerazione esclusivamente gli impulsi più alti, mentre TAYLOR, per la maggiore amplificazione e a seguito della rettificazione, prende in considerazione anche un certo numero di impulsi più piccoli.

Una conferma di tale supposizione ho avuto misurando la corrente di fondo dei F.M. con un galvanometro della sensibilità di $2,4 \cdot 10^{-10}$ A/div.: in questo caso viene misurata la totale corrente di oscurità. Al variare del potenziale dell'elettrodo esterno questa corrente si modifica come mostrano le curve della fig. 2, tracciate per diversi valori del potenziale dato al fotocatodo. Esse sono abbastanza simili a quella di TAYLOR.

Questa constatazione porta a ritenere che gli impulsi più grandi non seguano con la stessa legge dei piccoli impulsi le variazioni del potenziale esterno dato all'involucro. Siccome d'altra parte gli impulsi più alti contribuiscono in minima parte alla totale corrente di oscurità (da mie misure risulta che essi costituiscono meno dell'1 % della totale corrente) si comprende come l'effetto del potenziale esterno sulla corrente totale sia praticamente insensibile in quell'intervallo di potenziale esterno in cui solo il numero dei grandi impulsi viene notevolmente modificato.

Misure analoghe a quelle descritte sono state ripetute a temperature più alte e più basse di quella ambiente, tra $+55^{\circ}\text{C}$ e -50°C . Si è constatato così che l'effetto del potenziale dell'elettrodo esterno sulla riduzione del numero dei grandi impulsi di fondo è tanto meno sensibile quanto più bassa è la temperatura. Tale fatto può essere messo in relazione con la minore conducibilità che il vetro dell'involucro presenta alle basse temperature, la quale rende più difficile una alterazione del potenziale della parete interna del bulbo per conduzione attraverso il vetro delle cariche comunicategli dall'elettrodo esterno. Ciò è del resto in accordo col fatto che l'effetto dello schermo esterno è pressochè insensibile sul F.M. 1P 28, che ha il bulbo in vetro quarzoso, materiale di più bassa conducibilità.

Quanto al meccanismo attraverso il quale lo schermo esterno, se portato ad un potenziale conveniente, può rendere minore il numero dei grandi impulsi di fondo, sembra possibile che esso sia legato a qualche fenomeno in cui il ruolo principale spetta agli ioni del residuo gassoso del tubo ⁽³⁾, e più vicini al fotocatodo. Più difficile sembra sostenere ⁽⁴⁾ che quando il disturbo è minimo, esso rappresenti l'effetto della normale emissione termoionica del fotocatodo, perchè ho potuto riscontrare che l'effetto dello schermo esterno, tenuto ad un potenziale di $150 \div 200$ V più basso di quello del fotocatodo, non è solo quello di ridurre il numero dei grandi impulsi, ma anche quello di ridurre l'ampiezza di una quantità che si aggira sul 10 %, mentre d'altra parte mai si è osservato che l'applicazione dell'elettrodo esterno modifichi il coefficiente

⁽³⁾ V. K. SZWORYKIN e E. G. RAMBERG: *Photoelectricity* (New York, 1949), p. 148.

⁽⁴⁾ C. TAYLOR: *Journ. de Phys.*, **10**, 256 (1949).

di moltiplicazione medio che compete al potenziale di alimentazione del tubo, e la amplificazione di corrente che gli consegue.

Nella rivelazione delle radiazioni col metodo delle scintillazioni sono i grandi impulsi di fondo quelli che danno il maggior disturbo. L'aver trovato che essi possono essere alquanto ridotti di numero e di ampiezza anche senza ricorrere alla refrigerazione può essere quindi utile in qualche caso. Occorreva tuttavia notare che per ridurre detti impulsi non si può scegliere a caso un potenziale qualsiasi, compreso tra -500 V e -1000 V, come risulterebbe dalle considerazioni delle curve relative alla corrente totale, dato il differente effetto espletato dallo schermo sui grandi impulsi.

L'uso dello schermo è d'altra parte di estrema semplicità essendo sufficiente disporre sul bulbo, non però davanti alla finestra, una fine reticella metallica o una lamina leggera di alluminio, e collegarla ad un punto conveniente della catena di resistenze che distribuisce il potenziale ai vari elettrodi del F.M.

La mia gratitudine va al prof. ROSTAGNI per i consigli e la discussione dei risultati, e al laureando SPEROTTO per l'aiuto datomi nelle misure.

SUMMARY

In the photomultiplier Type « 931 A » the amount of electric current which still flows in absence of light depends, among other factors, on the potential reached by the glass bulb. This dependence is studied taking into consideration the intensity of the current as measured directly with a galvanometer and the number and amplitude of the component pulses, analysed with a proportional amplifier. The possibility of reducing the frequency of the pulses to about one tenth of its previous value is tested. This result is achieved simply by putting on the glass bulb a thin metallic plate, the negative potential of which is about 200 volts less than that of the photocathode.

Metodo per l'osservazione microscopica di preparati sottoposti all'azione degli ultrasuoni.

F. A. LEVI

Istituto di Fisica dell'Università di Perugia

(ricevuto il 20 Febbraio 1950)

Riassunto. — Viene descritto un dispositivo per mezzo del quale è possibile osservare al microscopio preparati in sospensione liquida, mentre sono sottoposti all'azione di onde ultracustiche. La configurazione del campo sonoro è particolarmente semplice ed è possibile il controllo della temperatura.

Sono note alcune disposizioni sperimentali, che permettono lo studio di preparati microscopici sottoposti all'azione di onde ultrasonore. Solitamente si osserva una goccia di liquido che è direttamente appoggiata sul quarzo piezoelettrico, oppure è raggiunta dalle vibrazioni convogliate ad essa mediante una bacchetta di vetro ⁽¹⁾.

Tali procedimenti presentano due gravi inconvenienti: non è possibile conoscere quale sia la distribuzione della energia sonora nel preparato e la temperatura di quest'ultimo non può essere valutata con precisione sufficiente.

Abbiamo perciò studiato un metodo che elimina gli inconvenienti anzidetti: esso è illustrato schematicamente dalla fig. 1.

Il preparato, consistente in una sospensione in liquido, è posto tra il vetrino copri-oggetti 2 ed una lamina 3, di materiale trasparente alla luce, che viene attraversata dagli ultrasuoni provenienti dal basso; tale lamina può ad esempio essere di cellophane sufficientemente sottile affinchè risulti trasparente anche per gli ultrasuoni.

La celletta che così si forma può essere riempita comodamente del liquido in esame, mediante una pipetta affilata introdotta attraverso una piccola

⁽¹⁾ E. N. HARVEY e A. L. LOOMIS: *Journ. Gen. Physiol.*, **15**, 147 (1931); F. O. SCHMITT: *Protoplasma*, **7**, 331 (1929).

apertura al margine del vetrino, che viene poi otturata con paraffina (non visibile in figura).

Sotto la membrana è una cavità 4, in comunicazione diretta con l'acqua della vasca in cui sono generati gli ultrasuoni.

Aspirando da un tubetto laterale 5, e completando l'operazione con una pipetta ricurva, la cavità viene riempita completamente di acqua, che arriva così a contatto della faccia inferiore della lamina trasparente 3.

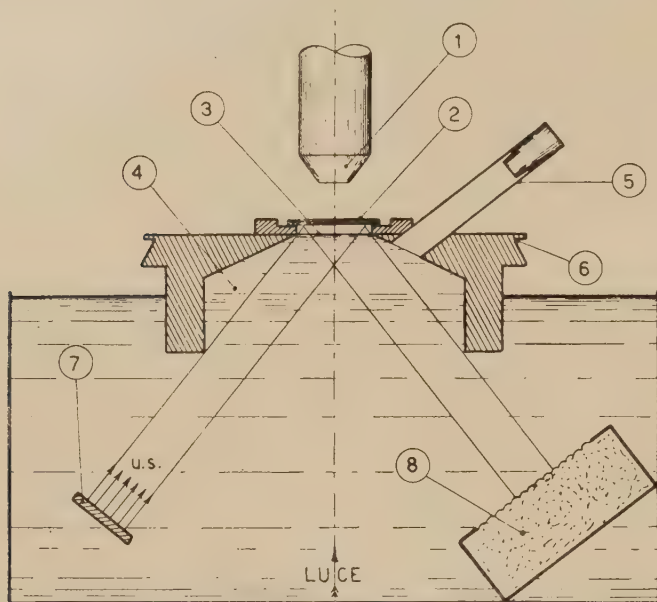


Fig. 1. - 1, Obiettivo del microscopio; 2, Vetrino copri-oggetti; 3, Lamina trasparente; 4, Cavità contenente il liquido aspirato; 5, Tubetto di aspirazione; 6, Bordo sagomato per l'applicazione del pezzo in luogo del tavolino del microscopio; 7, Sorgente di ultrasuoni; 8, Assorbitore.

Il solido a campana che limita la cavità ed il piano porta-oggetti costituiscono un tutto unico, che può essere sostituito al tavolino del microscopio e può quindi subire piccoli spostamenti a mezzo del dispositivo traslatore del microscopio stesso.

Il fascio di ultrasuoni generato nell'acqua, ed opportunamente inclinato, raggiunge ed attraversa la lamina e si riflette contro il vetrino, ritornando così nella vasca, dove si estingue nell'assorbitore 8. La illuminazione del preparato è ottenuta mediante un fascio di luce che proviene dall'acqua della vasca.

Con il metodo di osservazione descritto, che è stato già usato per l'esame di sospensioni di globuli rossi ⁽²⁾, la distribuzione dell'energia del campo ultra-

⁽²⁾ Ricerche in corso, eseguite in collaborazione con G. GIOLITTI.

sonoro risulta meglio definita, essendo la configurazione del campo determinata da una semplice riflessione sul vetrino copri-oggetti. È altresì evidente la possibilità di effettuare un più agevole controllo della temperatura del preparato.

SUMMARY

The author describes an experimental device by which it is possible to observe through a microscope a liquid suspension, while it undergoes the action of ultrasonic vibration. The liquid is in a small cell, into which the waves enter through a very thin wall and are reflected by a glass plate. In this way it is possible to obtain a particularly simple configuration of the ultrasonic field and an easier control of temperature.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

A proposito delle microantenne retiniche.

G. TORALDO DI FRANCIA

Istituto di Fisica dell'Università di Firenze

(ricevuto il 25 Marzo 1950)

Nel secondo volume dell'eccellente trattato di LE GRAND ⁽¹⁾, recentemente apparso, leggo a proposito della teoria dell'effetto STILES-CRAWFORD, da me proposta, che essa tradurrebbe in termini ondulatori l'effetto della riflessione totale interna. È probabile che l'autore al momento in cui scriveva questo non avesse ancora visto che la prima delle mie Note su tale teoria. Ma poichè anche O'BRIEN ⁽²⁾ sembra voler credere la stessa cosa, pur avendo preso conoscenza degli sviluppi successivi, ritengo utile precisare la questione, in modo da rimuovere un equivoco.

Il mio intervento nella ricerca di una spiegazione dell'effetto STILES-CRAWFORD ha avuto luogo in due stadi successivi.

Nella prima Nota ⁽³⁾ facevo presente che, essendo il diametro dei ricettori retinici paragonabile con la lunghezza d'onda, la propagazione all'interno di essi non poteva essere studiata in base all'ottica geometrica. Proponevo invece di usare la teoria delle guide d'onda dielettriche, per mezzo della quale si dimostra che la

percentuale di energia trasportata lungo l'asse va diminuendo rispetto a quella che sfugge lateralmente, via via che aumenta l'inclinazione della radiazione incidente. Questa è senza dubbio la traduzione ondulatoria della teoria della riflessione totale; come pure si riallaccia ad essa l'idea che la parte rastremata dei coni abbia la funzione di adattare l'impedenza del segmento interno a quella del segmento esterno. Pertanto da questa teoria non ci si può aspettare che un raffinamento rispetto al caso della riflessione totale geometrica.

Il secondo stadio è rappresentato dall'assimilazione dei ricettori retinici a microantenne ⁽⁴⁾. Credo utile sottolineare che non si tratta di una nuova espressione per dire la stessa cosa, ma di un concetto diverso. Si tratta ora dell'impedenza di entrata, ovvero della differenza fra l'impedenza dell'onda libera nell'umor vitreo e quella della radiazione all'interno della guida d'onda. Per vedere la cosa basta pensare al caso in cui le guide d'onda retiniche fossero dei tubi metallici, cioè a pareti perfettamente riflettenti. In questo caso la riflessione interna sarebbe sempre totale, eppure

⁽¹⁾ Y. LE GRAND: *Optique Physiologique*, vol. II (Parigi, 1949), p. 360.

⁽²⁾ B. O'BRIEN: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **39**, 324 (1949).

⁽³⁾ G. TORALDO DI FRANCIA: *Nuovo Cimento*, **5**, 589 (1948).

⁽⁴⁾ G. TORALDO DI FRANCIA: *Journ. Opt. Soc. Am.*, **39**, 324 (1949).

avrebbe luogo l'effetto STILES-CRAWFORD. Infatti anche le guide d'onda a pareti metalliche, quando funzionano come antenne, hanno il loro diagramma di radiazione, diverso da una sfera. Questo nuovo modo di considerare i ricettori retinici ha permesso di formulare l'ipotesi che debbano esistere dei lobi secondari, oltre a quello principale; e sembra che

in realtà l'esperienza dia conferma a tale ipotesi ⁽⁵⁾. Inoltre rimane più facile spiegare perchè i bastoncini hanno un diagramma di radiazione molto più largo dei coni, ciò che non sembra essere possibile con la teoria della riflessione totale.

⁽⁵⁾ G. TORALDO DI FRANCIA: *Proc. Phys. Soc.*, B 62, 461 (1949).

On positive and negative excess of the penetrating component of Cosmic Radiation at 3500 m above sea level.

I. F. QUERCIA, B. RISPOLI e S. SCIUTI

Istituto di Fisica dell'Università

Centro di studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 27 Marzo 1950)

Some measurements on the « positive excess » (charge effect) of the hard component of cosmic radiation were performed at the « Laboratorio della Testa Grigia », 3500 m a. s. l., 45° 50' North geographical latitude.

We used a device similar to that used by BERNARDINI and others ⁽¹⁾ but with the addition of anticoincidence counters near the central counter *B* as in the figure.

The results of these new measurements are summarized in tab. I. In this table coincidences (*AB*), refer to the coincidences per minute between the counters at the top and bottom of the first magnetic lens (the low cut-off energy of each lens is 230 MeV for mesons). Coincidences (*BC*) refer to coincidences per minute between the counters at the top and bottom of the second magnetic lens. Coincidences (*ABC*) refer to the 3-fold coincidences between the three counters of the telescope (cut-off energy for (*BC*) and (*ABC*) 460 MeV for mesons); N_{cc} and N_{da} refer respectively to the measurements taken with both magnetic lenses converging the positive or nega-

tive particles. The indicated errors are the standard deviations.

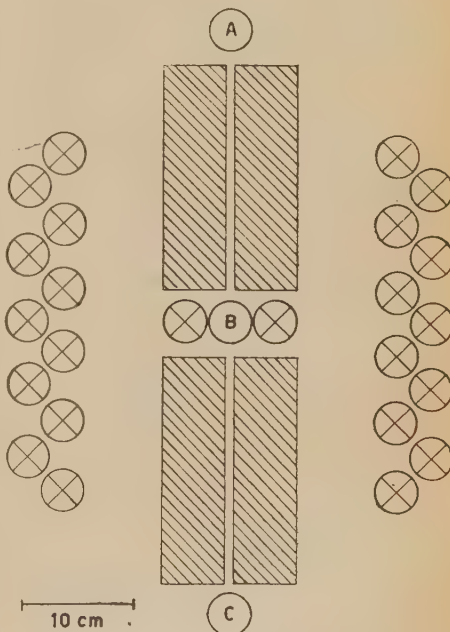


Fig. 1.

Measurements were taken with the axis of the telescope at inclinations of 0° to the vertical 60° East, and 60° West of the vertical.

⁽¹⁾ G. BERNARDINI, M. CONVERSI, E. PANCINI, E. SCROCCO and G. C. WICK: *Phys. Rev.*, **68**, 109 (1945).

TAB. I. — *Positive and negative frequencies at various zenith angles (3590 m).*

Zenith angle	Coinc. (AB)		Coinc. (BC)		Coinc. (ABC)	
	N_{cc}	N_{dd}	N_{cc}	N_{dd}	N_{cc}	N_{dd}
0°	$27,59 \pm 0,14$	$26,40 \pm 0,13$	$23,86 \pm 0,13$	$22,21 \pm 0,12$	$9,56 \pm 0,08$	$8,45 \pm 0,07$
60° E	$4,98 \pm 0,02$	$5,25 \pm 0,02$	$4,77 \pm 0,03$	$5,01 \pm 0,02$	$1,55 \pm 0,01$	$1,67 \pm 0,01$
60° W	$6,06 \pm 0,03$	$5,42 \pm 0,02$	$5,60 \pm 0,03$	$5,02 \pm 0,02$	$2,03 \pm 0,02$	$1,62 \pm 0,01$

TAB. II. — *Total intensity in vertical direction.*

Altitude		Coinc. (AB)		Coinc. (BC)		Coinc. (ABC)	
m above s. l.	g/cm ² from the top	$N_{cc} + N_{dd}$	Relat.	$N_{cc} + N_{dd}$	Relat.	$N_{cc} + N_{dd}$	Relat.
88	1030	$31,24 \pm 0,39$	100	$28,92 \pm 0,29$	100	$10,96 \pm 0,12$	100 (100)
3500	671	$53,99 \pm 0,18$	173	$46,07 \pm 0,18$	160	$18,01 \pm 0,11$	164 (190)
5100	550	$97,66 \pm 0,78$	313	$85,86 \pm 0,56$	298	$29,84 \pm 0,42$	272 (270)
7300	475	$172,32 \pm 1,01$	552	$122,56 \pm 0,78$	424	$39,36 \pm 0,51$	359 (350)

TAB. III. — *Positive effect in vertical direction.*

Altitude above sea level	δ_{AB}	δ_{BC}	δ_{ABC}
88 m	$2,8 \pm 1,3$	$2,5 \pm 1,1$	$7,3 \pm 1,3$
3500 m	$2,5 \pm 0,7$	$7,2 \pm 0,7$	$12,3 \pm 0,4$
5100 m	$9,4 \pm 1,4$	$11,4 \pm 1,0$	$12,8 \pm 3,0$
7300 m	$13,6 \pm 1,2$	$5,0 \pm 1,2$	$11,7 \pm 3,5$

TAB. IV. — Charge effect at 3500 m.

Zenith angle	δ_{AB}	δ_{BC}	δ_{ABC}
0°	+ 2,5 ± 0,7	+ 7,2 ± 0,7	+ 12,3 ± 0,4
60° E	— 5,3 ± 0,7	— 4,9 ± 0,8	— 7,4 ± 1,0
60° W	+ 11,2 ± 0,6	+ 10,9 ± 0,7	+ 22,2 ± 1,1
$\delta' = (\delta_E + \delta_W)/2$	δ'_{AB}	δ'_{BC}	δ'_{ABC}
—	+ 2,9 ± 0,9	+ 3,0 ± 1,1	+ 7,4 ± 1,5

In table II we have summarized the intensities of the penetrating component of the cosmic radiation as given by our present and previous measurements at various altitudes (2). The rates given are sums of N_{cc} and N_{ad} . There is a very close agreement between the relative intensities of the coincidences (ABC) and the figures in brackets obtained from the curve of the «hard component» referred to by Rossi (3).

In tab. III we give the values of the «charge effect» δ ; in the vertical direction,

$$\delta = 100 \frac{2(N_{cc} - N_{ad})}{N_{cc} + N_{ad}}$$

as obtained from our present and previous measurements. Here the indicated errors are the standard deviations. The new values at 3500 m altitude fit well between the values found by us at sea level and 5000 m altitude.

Lacking a reliable differential spectrum of the hard component at all the altitudes involved, we cannot calculate the

values of the «charge excess» from the values of δ given by our device. Nevertheless we may draw from these measurements the conclusion that the «positive excess» in vertical direction shows very little, if any, increase above 3500 m altitude.

In tab. IV are given the values of δ for various inclinations of the telescope at 3500 m altitude. From the figures in this table it is seen that at this altitude the «charge effect» δ decreases from positive values in the western direction to negative values in the eastern direction; the observed decrease being monotonic with the change in zenith angle from West to East. Since completing the above experiments we have learned that Prof. BRODE has performed similar experiments in the U.S.A., and it seems that our results agree fairly well with his. It will be seen that for the different coincidence rates δ' , the average values of δ for the East and West directions at 3500 m are in good agreement with the corresponding values of δ at sea level for the vertical direction. This is reasonable as the total of atmosphere traversed by the particles in these two positions is approximately the same.

We believe that all the electrons

(2) I. F. QUERCIA, B. RISPOLI, e S. SCIUTI: *Phys. Rev.*, **73**, 516 (1948); **74**, 1728 (1948); *Nuovo Cimento*, **4**, 283 (1947); **5**, 397 (1948).

(3) B. ROSSI: *Rev. of Mod. Phys.*, **20**, 537 (1948).

crossing the telescope would be accompanied by secondaries which would discharge the anti-coincidence counters placed very near to the central counter *B* of the telescope, and so such events would not be included in the records. We consider then, that the number of electrons recorded is negligible and so the observed negative value of δ could be explained assuming that the primary radiation responsible for the hard component contains negative particles.

If these primary particles are electrons, they must have a very strong interaction with nucleons to give rise to the observed penetrating component.

The possibility that a flow of fast neutrons coming from the sun could give an isotropic background of negative mesons, is ruled out by the fact that no

diurnal variations of the cosmic ray intensity are observed. There remains also the possibility, suggested by Dr. T. H. JOHNSON ⁽⁴⁾, of a deflection of the mesons caused by the magnetic field of the Earth. Probably some measurements of the energy of the particles that cause the « charge effect » would give us some information on this point. This experiment is now in progress.

We wish to thank Prof. BERNARDINI who suggested this experiment. We also should like to thank Mr. J. BUSCHMANN ⁽⁵⁾ for help in constructing and running the apparatus.

⁽⁴⁾ T. H. JOHNSON: *Phys. Rev.*, **59**, 11 (1941).

⁽⁵⁾ Max Planck Institut für Physik, Göttingen; at present: Centro di Fisica Nucleare del C.N.R., Rome, Italy.

INFORMAZIONI

Alle notizie circa il Congresso di Ultra-acustica che si terrà a Roma nel prossimo Giugno, già date nel numero precedente, aggiungiamo le seguenti.

Il Comitato organizzatore ha invitato al Convegno tutti i soci della Società che a sua conoscenza sono studiosi di problemi di Ultra-acustica; ma accoglie con gradimento la richiesta di partecipazione anche da parte degli altri. Quindi i soci che non siano stati direttamente invitati e desiderino prender parte al Convegno, possono inviare la loro richiesta alla Segreteria del Convegno stesso (Roma, Piazzale delle Scienze, 7) dalla quale avranno tutte le informazioni che desiderano.

Qui aggiungiamo i nomi dei relatori principali e i titoli delle relazioni:

BERGMANN L. — *Ultraschall in Wissenschaft und Technik.*

BRADFIELD G. — *Precision ultrasonic measurement of velocity and attenuation. Some experiments with barium titanate transducers.*

CANAC F. — (Non ancora fissato).

GRABAR — *Action des ultrasons sur les protéides et substances voisines.*

POHLMAN R. — *Possibilité des ultrasons pour la thérapie et la diagnose.*

SCHAFFS — *Ultraschall und die Struktur der Flüssigkeiten.*

SEIDEL F. — *Der Gegenwärtige Stand der Schallintensitäts und Temperaturmessung.*

ERRATA-CORRIGE

Eccesso positivo e molteplicità di produzione dei mesoni.

(P. CALDIROLA e A. LOINGER)

(*Nuovo Cimento*: 7, n. 2, p. 161)

pag. 162: Nelle formule (3) di riga 6 e 7 anzichè ≤ 4 GeV leggasi $\leq 0,4$ GeV.

pag. 164: Nella fig. 1 i punti sperimentali segnati con \triangle vanno attribuiti a BASSI e coll.; quelli segnati con \circ a WILSON.

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA